25/02/2025
dif geo 1
konuları

Keyfi Parametreli Eğriler

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ keyfi parametreli regüler eğri

$V_1(t), V_2(t) \ldots V_d(t)$ ortonormal çatı

$v(t) = \|\gamma'(t)\|$

$$\begin{bmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ \vdots \\ V_d'(t) \end{bmatrix} = v(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & 0 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ \vdots \\ V_d(t) \end{bmatrix}$$

Sonuç: $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ regüler parametrik bir eğri (3 rank 1)

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix} = v(t) \begin{bmatrix} 0 & k_1(t) & 0 \\ -k_1(t) & 0 & k_2(t) \\ 0 & -k_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N(t) \\ B(t) \end{bmatrix}$$

Yardımcı Teorem: $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ keyfi parametreli regüler bir eğri olsun

$\|\gamma'(t)\| = v(t)$

γ nın hız ve ivme vektörleri

$\gamma'(t) = v(t) \cdot T(t)$

$\gamma''(t) = v'(t) \cdot T(t) + k(t) \cdot v^2(t) N(t)$

İspat: β eğrisi γ nın birim hızlı yeniden parametrelendirilmesi olsun.

$\boxed{h(t) = s \ , \ h^{-1}(s) = t}$

$\beta(s) = \gamma \circ (h^{-1}(s))$

$\beta'(s) = \gamma'(h^{-1}(s)) \cdot (h^{-1})'(s)$

$\beta'(s) = \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$

Hatırlatma

$h^{-1}(s) = t \Rightarrow (h^{-1})'(s) = \frac{1}{h(t)}$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \beta'(t) \cdot \|\gamma'(t)\|$

$\gamma'(t) = T(t) \cdot v(t)$

$\Rightarrow$

$$\gamma''(t) = T'(t).v(t) + v'(t).T(t)$$
$$= v^2(t).k_1(t).N(t) + T(t).v'(t)$$

Önerme: $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, 3 Kanlı keyfi Parametreli regüler eğri olsun.

$$V_1 = T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$V_2 = N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$V_3 = B(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}$$

İspat: $\|\gamma'(t)\| = v(t) > 0$ dır.

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = v(t).T(t) \times v'(t).T(t) + k(t).v^2(t).N(t)$$
$$= k(t).v^3(t)\ T(t) \times N(t)$$
$$= k(t).v^3(t).B(t)$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = \sqrt{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'(t) \times \gamma''(t) \rangle}$$
$$= \sqrt{\langle k(t).v^3(t).B(t), k(t).v^3(t).B(t) \rangle}$$
$$= \sqrt{k^2(t).v^6(t)}$$
$$= k(t).v^3(t)$$

o halde

$$B = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}$$

Eğrilikler:

$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, 3 Kanlı keyfi Parametreli regüler bir eğri olsun.

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

İspat:

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = k(t) \cdot v^3(t) \cdot B(t)$$

$$\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\| = k(t) \cdot v^3(t)$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{v^3(t)} = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

$$\gamma'''(t) = \frac{d}{dt}(\gamma''(t)) = \frac{d}{dt}\left(v'(t) \cdot T(t) + k(t) \cdot v^2(t) \cdot N(t)\right)$$

$$= \frac{d^2v}{dt^2} T(t) + \frac{dv}{dt} \cdot T'(t) + \frac{dk(t)}{dt} \cdot v^2(t) N(t) + k\left(\frac{dv^2}{dt^2} N(t) + v^2(t) \cdot N'(t)\right)$$

$$T' = v(t)\, k(t)\, N(t)$$

$$N' = v(t)\left(-k(t)\, T(t) + \tau(t) \cdot B(t)\right)$$

$$\gamma'''(t) = \frac{d^2v}{dt^2} \cdot T + \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot k \cdot N + \frac{dk}{dt} \cdot v^2 \cdot N + \frac{dv^2}{dt^2} k \cdot N$$
$$+ k v^3 (-k T + \tau B)$$

$$\gamma'''(t) = \left(\frac{d^2v}{dt^2} - k^2 \cdot v^3\right) T + \left(\frac{dv}{dt} v k + \frac{dk}{dt} v^2 + \frac{dv^2}{dt^2}\right) N$$
$$+ (k v^3 \tau) B$$

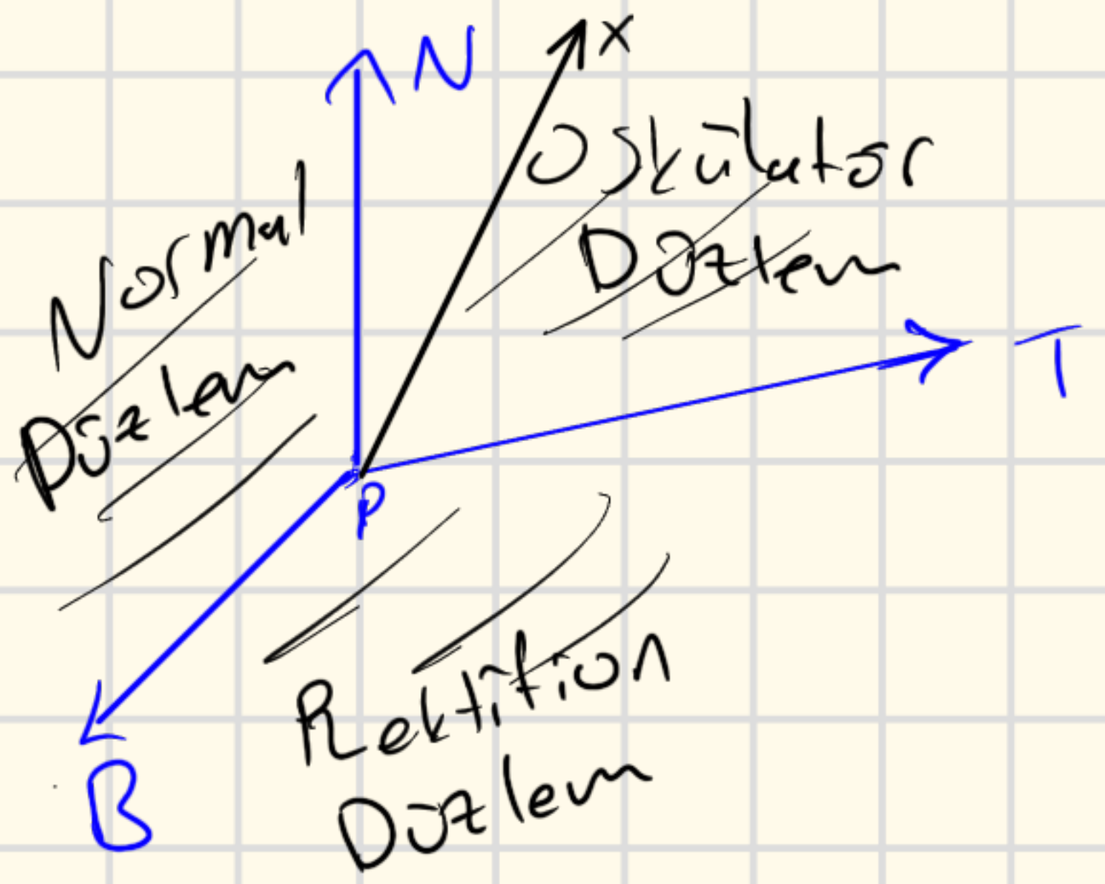
$$\Rightarrow \langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle = \langle k v^3 B, \text{———} + k v^3 \tau B \rangle$$
$$= k^2 v^3 \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{k^2 \cdot v^6} = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

25/02/2025

$\mathbb{R}^3$'te Bir Eğrinin Oskülatör, Rektifion, Normal Düzlemleri

α, $\mathbb{R}^3$'de regüler bir eğri



(N, $\vec{PX}$, T vektörleri aynı düzlemde lineer bağımlı, $\det(A)=0$)

$Sp\{T, N\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(t)$ noktasındaki afin uzaya α'nın Oskülatör düzlemi

$Sp\{N, B\}$ // Normal Düzlemi

$Sp\{B, T\}$ // Rektifion Düzlemi adı verilir.

Ör $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisi verilsin

$P = \alpha(1) = (2, 3, 4)$ noktasında α eğrisinin Oskülatör, Normal Rektifion düzlem denklemleri bulunuz.

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1-t^2, 2t, 1+t^2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(t^2-1, -2t, t^2+1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N = B \times T = \frac{1}{1+t^2}(-2t, 1-t^2, 0) = (-1, 0, 0)$$

Oskülatör düzlem

$\vec{PX}$, T, N lineer bağımlı

$\det(\vec{PX}, T, N) = 0$; $X = (x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}(y-3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(z-4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-4-y+3) = 0$$

$$\boxed{z-y-1=0}$$

II. yol: $\det(\vec{Px}, T, N) = \langle \vec{Px}, T \times N \rangle = \boxed{\langle \vec{Px}, B \rangle = 0}$

Normal Düzlem

$$\det(\vec{Px}, \vec{N}, \vec{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \langle \vec{Px}, N \times B \rangle = \langle \vec{Px}, T \rangle = 0 = \langle (x-2, y-3, z-4), (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(y-3+z-4) = 0 \quad \rightarrow \boxed{y+z-7=0}$$

Rektifion Düzlem

$$\det(\vec{Px}, B, T) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

Veya

$$\langle \vec{Px}, B \times T \rangle = 0$$
$$\langle \vec{Px}, N \rangle = 0$$

$$\langle (x-2, y-3, z-4), (-1, 0, 0) \rangle = 0 \quad \Rightarrow -x+2=0$$

$$\boxed{x=2}$$

04/03/2025

1-) $\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ eğrisinin $\alpha(1)$ noktasında oskülatör, rektifiyon, normal düzlem denklemlerini bulunuz.

$$\alpha'(t) = \left(1, \frac{-1}{t^2}, \frac{-1}{t^2} - 1\right) \; ; \; \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{t^4+t^2+1}$$

$\rightarrow \alpha$ eğrisi birim hızlı değildir.

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\left(1, -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} - 1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{t^2}\sqrt{t^4+t^2+1}} \rightarrow \boxed{T(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)}$$

$$B(1) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \; ; \; \alpha''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2} - 1 \\ 0 & \frac{2}{t^3} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

$$B(1) = \frac{\left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6} + \frac{4}{t^6}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)}$$

$$N(1) = B(1) \times T(1)$$

$$N(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

Oskulatör düzlem

$\overrightarrow{PX} = (x-1, y-2, z)$; $0 = \langle PX, B \rangle$ veya $\det(PX, T, N) = 0$ ile bulunur.

$$\det(PX, T, N) = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{y - x - z = 1}$$

Normal düzlem

$$\det(PX, N, B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{2z + y - x = 1}$$

Rektifyon düzlem

$$\det(PX, B, T) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{x + y = 3}$$

2-) $\alpha(s) = \left(\frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$, $(-1<s<1)$ olsun.

a) α'nın Frenet eğriliklerini hesaplayınız.

b) α'nın $s = \frac{1}{2}$ deki rektifyon, oskülatör, Normal düzlem denklemlerini bulun.

$$\alpha'(s) = \left(\cancel{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(1-s)^{1/2}}{\cancel{3}}, \cancel{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(1+s)^{1/2}}{\cancel{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad \|\alpha'\| = \sqrt{\frac{(1-s)}{4} + \frac{(1+s)}{4} + \frac{1}{2}} = 1$$

$\rightarrow \alpha$ eğrisi birim hızlı

$$T = \alpha', \quad N = \frac{\alpha'}{\|\alpha''\|}, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$\boxed{T = \alpha'(s) = \left(-\frac{(1-s)^{1/2}}{2}, \frac{(1+s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$\alpha''(s) = \left(\frac{(1-s)^{-1/2}}{4}, \frac{(1+s)^{-1/2}}{4}, 0 \right) \Rightarrow \|\alpha''\| = \sqrt{\frac{(1-s)^{-1}}{16} + \frac{(1+s)^{-1}}{16}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}}$$

$$N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\left(\frac{(1-s)^{-1/2}}{4}, \frac{(1+s)^{-1/2}}{4}, 0 \right)}{1/(2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2})}$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{(1-s)^{1/2}}{2} & \frac{(1+s)^{1/2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+s)^{1/2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-s)^{1/2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{(1-s)^{1/2}}{2}, -\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}(1-s) - \frac{\sqrt{2}}{4}(1+s) \right)$$

$$\boxed{B = \left(-\frac{(1-s)^{1/2}}{2}, -\frac{(1+s)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$k_1(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s^2}} \quad , \quad k_2(s) = \frac{-\sqrt{2}(1-s^2)^{-1/2}}{4}$$

$$\vec{PX} = \left(x - \frac{1}{6\sqrt{2}} , y - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} , z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right.$$

$$\alpha\left(\tfrac{1}{2}\right) = P = \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$T(1/2) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(1/2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2, 0\right)$$

$$B(1/2) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Oskülatör düzlem ; $\langle \vec{PX}, B\rangle = 0$

$$\boxed{\frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}\,y}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{1}{12} = 0}$$

Normal düzlem ; $\langle \vec{PX}, T\rangle = 0$

$$\boxed{\frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}y + \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{1}{12} = 0}$$

Rektifiyan düzlem ; $\langle \vec{PX}, N\rangle = 0$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} + \frac{1}{\sqrt{16}} = 0}$$

3-) $\alpha(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ eğrisini Frenet elemanlarını ve $t=0$ daki oskülatör rektifiyan, normal düzlem denklemlerini bulunuz.

$$\alpha'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{t^2}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1\right]} = \sqrt{3}\,e^t$$

$\alpha \to$ birim hızlı değil.

$$T = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)}$$

$$\alpha''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t), \quad \alpha'''(t) = (-2e^t(\sin t + \cos t), 2e^t(\cos t + \sin t), e^t)$$

$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 2e^{3t} \neq 0$ olduğundan Frenet 3-Çatısı tanımlıdır.

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & e^t \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & e^t \end{vmatrix} = (e^{2t}(\sin t - \cos t), -e^{2t}(\cos t + \sin t), 2e^{2t})$$

$$\boxed{B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t, -\cos t - \sin t, 2)}$$

$$N = B \times T = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t & 2 \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3(\cos t + \sin t), -3(\sin t - \cos t), 0)$$

$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t, 0)}$$

$$\alpha(0) = (1,0,1) \to \overrightarrow{PX} = (x-1, y, z-1)$$

$$T(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$N(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$B(0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Oskülatör düzlem ; $\langle \overrightarrow{PX}, B \rangle = 0$

$$\Rightarrow \left\langle (x-1), y, z-1), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{-x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\to \boxed{-x - y + 2z - 1 = 0}$$

Rektifiyon düzlemi ; $\langle \vec{PX}, N \rangle = 0$

$$\langle (x-1, y, z-1), (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle = 0 \longrightarrow \boxed{-x+y+1=0}$$

Normal düzlem

$$\langle (x-1, y, z-1), (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) \rangle = 0 \longrightarrow \boxed{x+y+z-2=0}$$

Eğriliklerin Geometrik Anlamları:

$\alpha : I \subset \mathbb{R}^3 \to E^3$ eğrisini Taylor serisine $s_0 = 0$ da açalım

$$\alpha(s) \cong \alpha(0) + \alpha'(0).s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots \quad (*)$$

elde edilir. $\alpha(0)$ noktasındaki Frenet 3-Çatısı $\{T_0, N_0, B_0\}$ ise s yay Parametresi olmak üzere

$$T' = k_1 N \quad , \quad N' = -k_1 T + k_2 B \quad , \quad B' = k_2 N$$

$$\alpha'(s) = T(s)$$
$$\alpha''(s) = T'(s) = k_1(s).N(s)$$
$$\alpha'''(s) = (T'(s))' = k_1'(s).N(s) + k_1(s)(-k_1 T + k_2 B)$$

elde edilir. Bulunanlar $(*)$'da yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \left[s - k_1^2(0)\frac{s^3}{3} + \cdots\right] T_0 + \left[k_1(0)\frac{s^2}{2} + k_1'(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots\right] N_0 + \left[k_1(0).k_2(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots\right] B_0 \quad (**)$$

olduğu görülür.

- Lineer Yaklaşım

s_0 noktasının bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda eğrimizi ele alalım. ε'nun öyle küçük bir değerini seçelim ki $s \neq 0$ fakat $s^2 = s^3 = \cdots s^n = 0$ olsun. O zaman bu eğri bizim eğrimizin kendisi olmadığından (1 Parçası olduğu için) $\hat{\alpha}(s)$ ile gösterelim $(**)$'dan

$\hat{\alpha}(s) = \alpha(0) + sT(0)$ dır.

↳ α'nın $s_0=0$ noktasındaki teğet doğrusudur.

• Kuadratic Yaklaşım

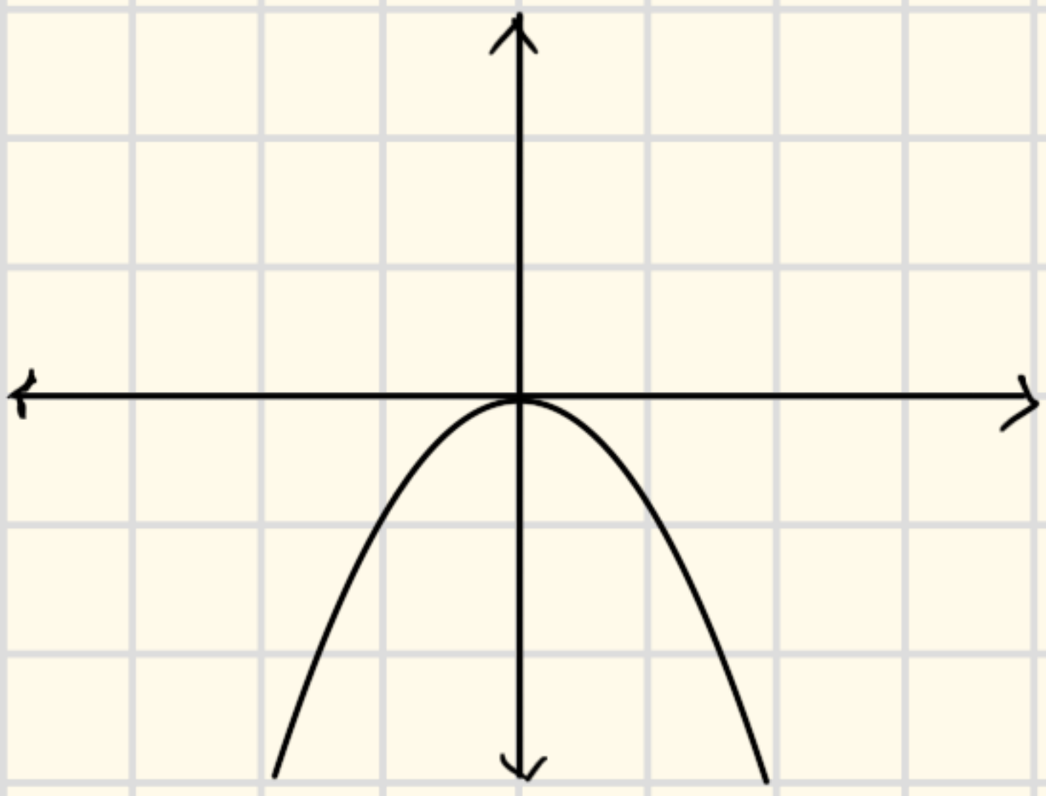
$s_0=0$ noktasının öyle bir ε komşuluğu seçelim ki $s\neq 0, s^2\neq 0$ fakat $s^3=s^4=\dots=s^n=0$ olsun.

$$\hat{\hat{\alpha}}(s) = \alpha(0) + sT_0 + k_1\frac{s^2}{2}N_0 \text{ dır}$$

Bu eğri $\alpha(0)$ noktasından geçen ve Parametrik ifadesi $(s, k, \frac{s^2}{2})$ olan bir Paraboldür.

$k_1(0)=0$ ise $\hat{\hat{\alpha}}$ bir doğrudur. Yani, $k_1(0)$ değeri sıfıra yaklaştıkça eğri doğruya yaklaşır.

✱ k_1 eğriliği eğrimizin s_0 noktasında bir doğrudan (teğet doğrusundan) ne kadar ayrıldığını gösterir.



- $k_1(0)$ sayısı büyüdükçe Parabolün kolları N_0'a yaklaşır
- $k_1(0)$ sayısı küçüldükçe Parabolün kolları N_0'dan uzaklaşır.
- $k_1(0)=0$ ise Parabolün kolları T_0 ile çakışır.

• Frenet Yaklaşımı

$s_0=0$ noktasının öyle bir ε komşuluğu seçelim ki $s=0, s^2\neq 0, s^3\neq 0$ fakat $s^4=s^5=\dots=s^n=0$ olsun. (✱✱) dan

$$\hat{\hat{\hat{\alpha}}}(s) = \alpha(0) + \left[s - \frac{k_1^2(0)}{3!}\cdot s^3\right]T_0 + \left[k_1(0)\frac{s^2}{2} + k_1'(0)\frac{s^3}{3!}\right]N_0 + \left[k_1(0)\cdot k_2(0)\frac{s^3}{3}\right]B_0$$

elde edilir. Bu eğriye, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet yaklaşımı denir.

$k_2 = 0$ için eğri $\alpha(s)$'nın Oskülatör düzleminde yatar.
$k_2 \neq 0$ için bu eğri $\alpha(s)$'nın Oskülatör düzleminde uzaklaşır.

Yani; k_2 burulması eğrimizin bir oskülatör düzlemden ne kadar saptığını ölçer.

Teorem: E^3 uzayında bir α eğrisi ($\alpha: I \to E^3$) verilsin. $s \in I$ eğrinin yay parametresi olsun. Eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart $k(s) = 0$ olmasıdır.

Teorem: α, E^3 uzayında eğri, $s \in I$ bu eğrinin yay parametresi, k, eğrinin eğrilişi, τ eğrinin burulması, $\{T, N, B\}$ frenet çatısı olsun.

Eğrinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = 0$ olmasıdır.

11/03/2025

Tanım: E^3'te bir eğrinin sabit bir doğrultu ile her noktasındaki teğetinin yaptığı açı sabit ise bu eğriye <u>eğilim çizgisi</u> veya <u>helis</u>, sabit doğruya da <u>eğilim çizgisinin ekseni</u> veya <u>eğilim ekseni</u> denir.

Ör Bir fasülyanın ambalajın sarılırken izlediği yol bir helis eğrisidir. Yada bir vidanın yörüngesi helis eğrisidir.

Ör $\alpha: I \to E^3$
$t \to \alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, bt)$; $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$ helis eğrisi midir?

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2 + b^2} \neq 0$ regüler eğri

$\vec{v} = (0,0,1)$ (Sabit doğru = z ekseni)

$\alpha'(t)$ ile v arasındaki açı $\cos\theta = \dfrac{\langle \alpha'(t), v \rangle}{\|\alpha'(t)\| \, \|v\|}$

$$= \frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}} = \text{sbt} \rightarrow \text{Eğilim açısı}$$

olduğundan bu eğri helis eğrisidir.

Teorem: α, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir eğri $(k>0)$

α silindirik helis $\Leftrightarrow \frac{\tau}{k} = \text{sbt}$

Sonuç: α, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir eğri olsun.

1) $k=0 \Rightarrow \alpha$ bir doğrudur.

2) $\tau=0$, $k\neq 0 \Rightarrow \alpha$ bir düzlemsel eğridir.

3) $k>0$, $\tau=0 \Rightarrow \alpha$ bir çemberdir.

4) $k>0$ sbt, $\tau=0$ sbt $\Rightarrow \alpha$ dairesel helis

5) $\frac{\tau}{k\neq 0} = \text{sbt} \Rightarrow \alpha$ silindirik helis

Tanım: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ regüler eğri

k: eğrilik

τ: torsiyon $\neq 0$ o.ü.

$$H: I \to \mathbb{R}$$
$$t \to H(t) = \frac{k}{\tau}$$

fonksiyonuna α eğrisinin **Harmonik Eğrilik** denir.

Teorem: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ regüler eğrisinin

Harmonik eğrilik H sabittir $\Leftrightarrow \alpha$ bir eğilim çizgisidir.

Tanım: $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha^*: J \to \mathbb{R}^3$ } regüler parametrik eğriler o.ü.

$\alpha: V_1, V_2, V_3$, $\alpha^*: V_1^*, V_2^*, V_3^*$ } Frenet vektörleri

$\langle V_1, V_1^* \rangle = 0 \Rightarrow \alpha^*$'a α'nın involüt α'ya da α^*'in evolüt denir.

α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğeti α^* eğrisinin $\alpha^*(t)$ noktasındaki teğetine dik ise α^*'a α'nın involütü denir.

Ör $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t+1, \frac{t^2}{2}, 2t)$
$\beta: I \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = (\frac{t^2}{2}, 3, -\frac{t^2}{4}+5)$

Eğrilerin involüt, envolüt eğri çifti oluşturduğunu gösteriniz.

$\forall t \in I$ için α'nın teğet vektörü

$$\alpha'(t) = (1, t, 2)$$

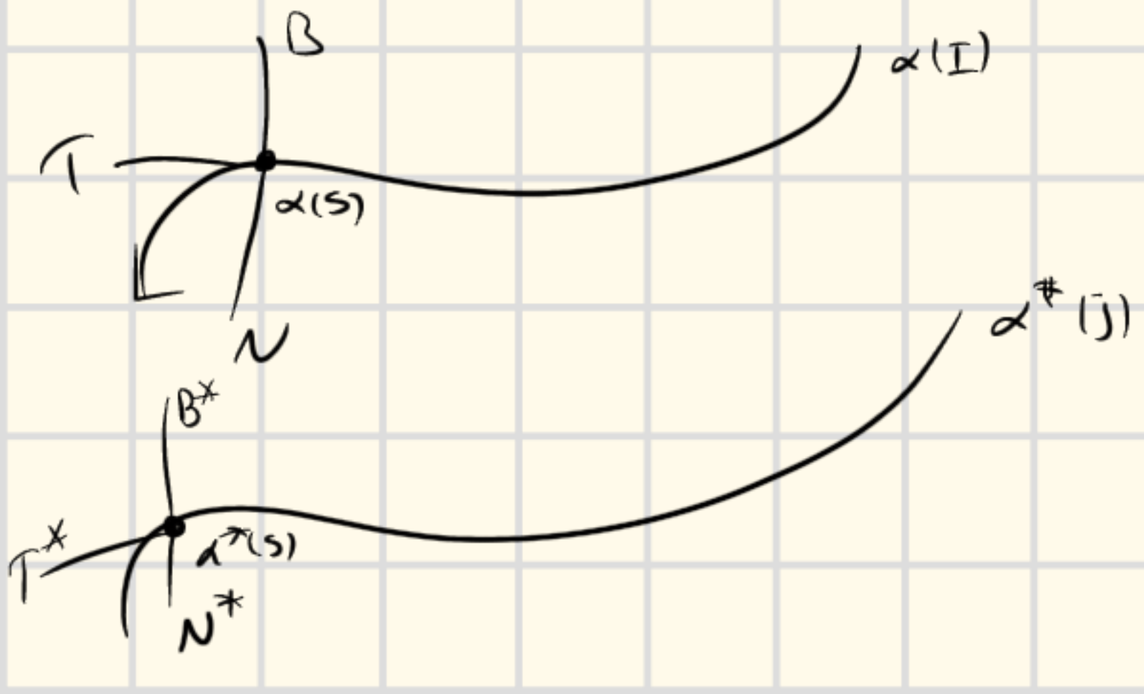
$\forall t \in I$ için β'nın teğet vektörü

$$\beta'(t) = (t, 0, -\frac{t}{2})$$

$$\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle = t - t = 0 \quad \checkmark$$

Tanım: (Bertrand eğri çifti)

$\alpha: I \to \mathbb{R}^3$
$\alpha^*: J \to \mathbb{R}^3$ regüler parametrik eğriler o.ü.



$\alpha(s)$ ile $\alpha^*(s)$ noktalarını birleştiren doğrunun doğrultu vektörü NN^* ise bu bu eğrilere Bertrand eğri çifti denir.

Tanım: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir dönüşüm $(\forall p,q \in \mathbb{R}^n)$

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

$(p,q) \to d(p,q) = \|p-q\| = \|q-p\|$ uzaklık fonksiyonu o.ü.

$\boxed{d(p,q) = d(f(p), f(q))}$ ise f'ye $\mathbb{R}^n$'nin bir izometrisi (uzaklık korunan dönüşüm) denir.

Ör $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$p \to T_a(p) = p+a$ dönüşümü $\mathbb{R}^n$'de ötelemedir. T_a bir izometridir.

$\forall p,q \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(T_a(p), T_a(q)) = d(p+a, q+a) = \|(p+a)-(q+a)\| = \|p-q\| = d(p,q)$$

11/03/2025

DİF. GEO. II

E^3 Öklid Uzayında Yüzeyler Teorisi

Tanım: (sonuçta yüzeydir) U, E^3 Öklid uzayında açık alt küme o.ü. $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemi yardımıyla tanımlanan

$$M = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid f : U^2 \subset E^3 \to \mathbb{R},\ \forall p \in M,\ \nabla f_{|p} \neq \vec{0} \}$$
$$x \to f(x_1, x_2, x_3) = c = \text{Sabit}$$

kümesine E^3 uzayında yüzey denir

Ör $S^2 = \{ X = (x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \}$ kümesine E^3 uzayında küre (yüzey) denir?

$$\nabla f_{|p} = (2x_1, 2x_2, 2x_3)_{|p} = \vec{0} \iff x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

$X(0,0,0)$ için $f(0) \neq 1$ //

Ör $M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 \}$ konisi yüzey midir?

$$\nabla f_{|p} = (2x, 2y, -2z)_{|p} = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

$P = (0,0,0) \Rightarrow f(P) = 0^2 + 0^2 - 0^2 = 0$ denklemi sağladı;

$M - \{(0,0,0)\}$ için bir yüzeydir.

$\Rightarrow (0,0,0)$ için $\nabla f_{|p} = 0$ olduğundan ona yüzeyin singüler noktası

Ör $M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid g : U \in E^3 \to \mathbb{R}$
$(x,y,z) \to g(x,y,z) = z(z-2) + xy = c \}$
yüzey midir?

$$\nabla g_{|p} = (y, x, 2z-2) = \vec{0} \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = 1$$

$P = (0,0,1)$ için $\nabla g_{|p} = \vec{0}$ dır

$g(P) = c = -1$ $\quad c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için M bir yüzeydir.

Tanım: (Tanjant = Teğet Uzay)

M, E^3 öklid uzayında bir yüzey olsun. $\vec{v_P} \in T_P(E^3)$ tanjant vektörü $P \in M$ noktasından geçen M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin hız vektörü olduğunda $\vec{v_P}$ tanjant vektörü yüzeye P noktasında teğettir denir. $P \in M$ noktasındaki tüm teğet vektörlerin kümesi T_PM ile gösterilir ve teğet (tanjant) uzay adını alır.

Tanım: (Normal Vektör)

M, E^3 öklid uzayında bir yüzey olsun. Bütün tanjant vektör alanlarına dik olan yani T_PM uzayına dik olan Z_P vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki Normal vektörü denir.

Teorem: E^3 öklid uzayında M yüzeyi verilsin.

$$\vec{\nabla f} = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \quad \text{o.ü.}$$

$$\forall P \in M, \ \forall v_P \in T_PM, \ \boxed{\langle v_P, \nabla f_{|P} \rangle = 0}$$

Yani f fonksiyonu P noktasındaki gradyanı vektörü M yüzeyinin P noktasındaki normal vektörüdür.

Teğet Düzlemin Denklemi → Sınavda Çıkacak

E^3 öklid uzayındaki M yüzeyinin $P \in M$ noktası için $\vec{\nabla f}_{|P}$ teğet düzleminin bir normali olacağından

$$\langle \vec{PX}, \vec{\nabla} f_{|P} \rangle = \vec{0}$$

X: Düzlemin bir temsili noktası

Ör $z = xy$ yüzeyinin $P(1,1,1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bul.

$\nabla f = (y, x, -1)_{|P} = (1,1,-1)$, $\vec{PX} = (x-1, y-1, z-1)$

$\langle \vec{\nabla f}_{|P}, \vec{PX} \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle (1,1,-1), (x-1, y-1, z-1) \rangle = 0$

$\Rightarrow x-1+y-1-z+1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x+y-z-1=0}$

18/03/2025

Ör $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ küre yüzeyi için,

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ün grafiği: üst yarı küreye karşılık gelir.
$z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ alt

$y = \sqrt{1-x^2-z^2}$ sağ
$y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$ sol

$x = \sqrt{1-y^2-z^2}$ ön
$x = -\sqrt{1-y^2-z^2}$ arka

Tanım (Yama): $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \to \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

1:1, regüler türevlenebilir dönüşüme bir koordinat yaması denir.

Tanım (Has Yama): $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \phi(D) \subset \mathbb{R}^3$ koordinat yaması

$\phi^{-1} : \phi(D) \to D$ sürekli ise ϕ koordinat yamasına Has yama denir. (Yani ϕ homeomorfizm)

$\phi : D = I \times J \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longrightarrow \phi(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$

Yüzeyin birim normal vektörü,

$$N = \pm \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

ile bulunur.

$M = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n \mid f : U(E^n \to \mathbb{R},\ \nabla \vec{f}_p \neq 0 \}$

$X \to f(x) = c = \text{sbt} \quad \forall p \in M$

Yüzeyinin birim normal vektörü

$$N = \pm \frac{\vec{\nabla} f_p}{\|\nabla f_p\|}$$

ile bulunur.

Tanım (Monge Yaması):

$D \subset \mathbb{R}^2$ açık küme, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonk. olsun

$X : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longrightarrow X(u,v) = (u, v, f(u,v))$

Yamasına monge yaması denir.

Ör $\phi(u,v) = (u, v, u.v)$ Parametrik denklemi ile tanımlanan M yüzeyinin $P(1,2,2)$ noktasındaki teğet düzlemini bulunuz.

$\phi_u = (1, 0, v)$

$\phi_v = (0, 1, u)$

$N = \phi_u \times \phi_v = (-v, -u, 1)$

$$\langle \vec{N}_{(P)}, \vec{PX} \rangle = 0$$

$$= \langle (-v, -u, 1), (x-1, y-2, z-2) \rangle = 0$$

$$= \langle (-2, -1, 1), (x-1, y-2, z-2) \rangle = 0$$

$$= -2(x-1) - 1(y-2) + z - 2 = 0$$

$$= -2x - y + z + 2 = 0$$

$$= \boxed{2x + y - z - 2 = 0}$$

Tanım (Parametre Eğrileri):

$X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u, v) \to (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ yüzeyi verilsin.

$u = u_0 \Rightarrow X(u_0, v) = (x_1(u_0, v), x_2(u_0, v), x_3(u_0, v)) \to v$ - Parametreli eğri

(Meridyen; $\to$ sabit)

$v = v_0 \Rightarrow X(u, v_0) = (x_1(u, v_0), x_2(u, v_0), x_3(u, v_0)) \to u$ - Parametreli eğri

(Paralel)

Ör: $\phi: (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \to S^2_r \subset E^3$

$(u, v) \to \phi(u, v) = (r\cos v \cdot \cos u, r\cos v \sin u, r \sin v)$

Parametreli $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresinin

Meridyen

v Parametreli eğri $(r\cos v \cos u_0, r\cos v \sin u_0, r \sin v)$; $u = u_0 = sbt$

Paralel

u Parametreli eğri $(r\cos v_0 \cos u, r\cos v_0 \sin u, r \sin v_0)$; $v = v_0 = sbt$

Ör: elliptik Paraboloid

$z = x^2 + y^2$ yüzeyinin birim normal vektörünü bulunuz.

$$g(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$$

$$\nabla g = \text{grad}\, g = (-2x, -2y, 1)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{\nabla g}}{\|\vec{\nabla g}\|} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

$$X(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_u = (1,0,2u) \\ X_v = (0,1,2v) \end{array}\right\} \text{Teğet vektörler} \left\{ X_u \times X_v = (-2u, -2v, 1)\right.$$

$$\frac{X_u}{\|X_u\|} = \frac{(1,0,2u)}{\sqrt{1+4u^2}}, \quad \frac{X_v}{\|X_v\|} = \frac{(0,1,2v)}{\sqrt{1+4v^2}}$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

Ör Aşağıdaki dönüşümlerin yama olup olmadığını gösteriniz.

a) $X(u,v) = (u, uv, v)$

b) $X(u,v) = (u^2, v^2, v)$

a) 1:1

$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$ iken

$= (u_1, u_1v_1, v_1) = (u_2, u_2v_2, v_2)$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ u_1v_1 = u_2v_2 \\ v_1 = v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2) \quad 1:1 \checkmark$$

Regülerlik

I. yol

$$J(X, (u,v)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u & v \end{vmatrix} = v, \quad \begin{vmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = u, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan rank = 2 dir $\Rightarrow$ regülerdir.

II. yol

$X_u = (1, v, 0)$

$X_v = (0, u, 1)$

$X_u \times X_v = (v, -1, u) \neq \vec{0}$ olduğundan X regülerdir

$\Rightarrow$ $X(u,v)$ yamadır.

b) 1:1

$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$ iken

$$\left.\begin{array}{l} u_1^2 = u_2^2 \\ v_1^2 = v_2^2 \\ v_1 = -v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 = \pm u_2$$ olduğundan 1:1 değildir

$\Rightarrow$ X yama değildir.

Ör $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \to X(u,v) = (v, v^2, u+v^3)$ bu yama mıdır?

1:1

$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$ iken

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_2 \\ v_1^2 = v_2^2 \\ u_1 + v_1^3 = u_2 + v_2^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{array}$$ olduğundan $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ olduğundan X 1:1 dir.

Regülerlik

$$J(X, (u,v)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2v \\ 1 & 3v^2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2v \\ 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = -2v$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = -1$ ✓

olduğundan Rank $J = 2$ X regüler dir. O halde X immersiyondur.

Örtenlik

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $X(u,v) = (x,y,z)$ o.s. $\exists (u,v) \in \mathbb{R}^2$ vardır

$$\left.\begin{aligned} v &= x \\ v^2 &= y \\ u + v^3 &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u &= z - x^3 \\ v &= x \end{aligned}$$

X 1:1 ve örten olduğundan X^{-1} mevcut

$X^{-1} = X(D) \to D$

$X(u,v) = (v, v^2, u + v^3)$

$X^{-1}(X(u,v)) = X^{-1}(v, v^2, u+v^3) = (u,v)$

$$\left.\begin{aligned} v &= x \\ v^2 &= y \\ u + v^3 &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u &= z - x^3 \\ v &= x \end{aligned}$$

$\Rightarrow X^{-1}(x,y,z) = (\underbrace{z - x^3}, \underbrace{x})$

bileşenleri sürekli old.dan X^{-1} süreklidir.

O halde X homeomorfizmdir.

Ör $M = \{ (x,y,z) \in E^3 \mid g : U \subset E^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \to g(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$, $z \in \mathbb{R} \}$

Yüzey belirtir mi?

$\vec{\nabla g} = (2x, 2y, 0) = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

$P=(0,0,c)$ için $\vec{\nabla g}=0$ dır. $P\notin M$

$\forall P\in M$ için $\nabla g_{|P}\neq\vec{0}$ olduğundan M bir yüzeydir.

Ör $M_1=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1x_3-1=0\}$ ve
$M_2=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2-x_2x_3=0\}$

Yüzeylerini ortaksiyi olarak verilen eğrinin $P=(1,?,?)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$x_1=1$ için $P\in M_1$ old. $x_3=1$ ve $P\in M_2$ old. $x_2=1$ bulunur.

$\Rightarrow P=(1,1,1)$

M_1'in P deki normali $\vec{\nabla} f_{1|P}=(x_3\ 0, x_1)=(1,0,1)$ ve
M_2'nin P deki normali $\vec{\nabla} f_{2|P}=(2x_1,-x_3,-x_3)=(2,-1,-1)$

α eğrisi teğeti T ise eğri her iki yüzeye de ait old. $T\perp\vec{\nabla} f_{1|P}$
$T\perp\vec{\nabla} f_{2|P}$

$T=\vec{\nabla} f_{1|P}\times\vec{\nabla} f_{2|P}$
$T=(1,3,-1)$

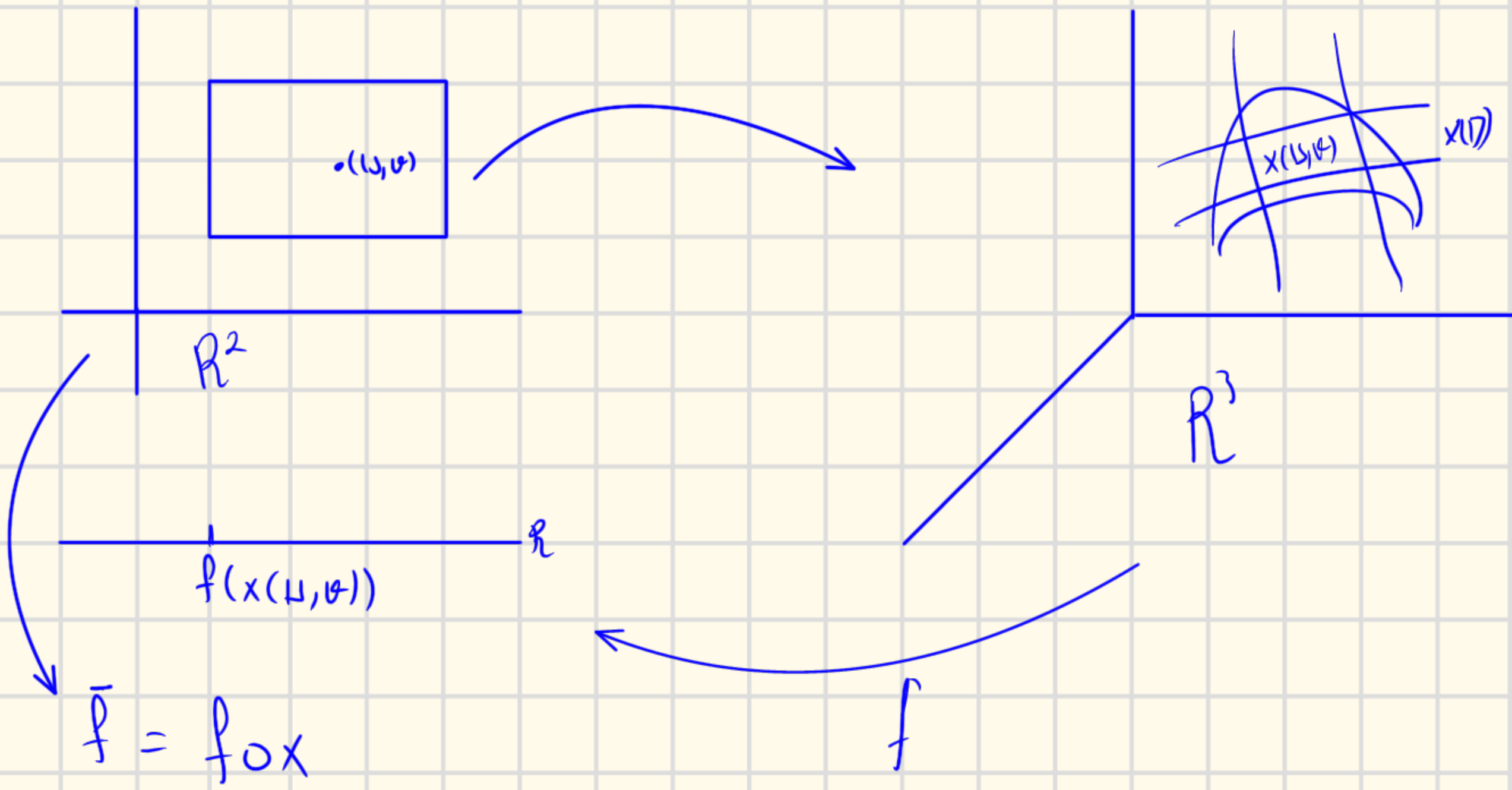
α ... $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$

25/03/2025

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$
$(u,v)\to(f_1|(u,v),\ f_2|(u,v),\ f_3(u,v))\to\frac{df}{dx_1},\frac{df}{dx_2},\dots\frac{df}{dx_1dx_2dx_3}$

$\forall f_i\in C^\infty|E^2,E^3$

M: E^3'te bir uzay olsun.
$f:M\to\mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonun türevlenebilirliği nasıl tanımlanacağız?



$x: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^2$ bir yama olsun.

$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon

$f\circ x: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna f'nin koordinat (harita) temsilcisi denir.

Tanım: Eğer $f\circ x$ türevlenebilirse f'ye türevlenebilirdir denilecek.

Ör $D: \begin{array}{l} -\pi < u < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2} \end{array}$

$x: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow E^3$

$(u,v) \longrightarrow x(u,v) = (r\cos v \cos u,\ r\cos v \sin u,\ r\sin v)$

Küre yüzeyinin parametrelendirilmesi için $M = S_0^2(r)$ $\quad P=(P_1,P_2,P_3)\in M$

$f: M \to \mathbb{R}$

$P \to f(P) = P_1^2 + P_2^2$ verilsin

f fonksiyonu koordinat temsilcisini bul. (Türevlenebilirliğini gösterin)

$f\circ x: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koordinat temsilcisi

$$\begin{aligned}(u,v) \to (f\circ x)(u,v) &= f(x(u,v)) \\ &= r^2\cos^2 v \cos^2 u + r^2\cos^2 v \sin^2 u \\ &= r^2 \cos^2 v\end{aligned}$$

$$\frac{d(f\circ x)}{dw} = 0 \qquad \frac{d(f\circ x)}{dv} = -2r^2\cos v \sin v$$

$f\circ x$ türevlenebildiğinden f de türevlenebilirdir.

Tanım: (Yüzey Üzerinde Eğri)

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$ bir fonk. olsun.
$x: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$ bir yama olsun.

Eğer

$\tilde{\alpha} = x^{-1}\circ\alpha : I \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^2$ fonksiyonu ise α'ya M'de bir eğri denir.

Tanım: (Tanjant Vektörü)

M, E^3'te bir yüzey ve $P \in M$ nokta
$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to M$
$t \longrightarrow \alpha(t)$ ve $\alpha(t_0) = P$ olsun.

Eğer $\alpha'(t_0) = v_P$ diyorsa v_P ye M'nin $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörü denir.

Önerme: $P \in M \subset E^3$ ve $x: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$ bir yama ve $x = (u_0, v_0) = P$ olsun.

Bu taktirde $\underbrace{\text{"}v_P \in T_P M \Leftrightarrow v_P \in S_P\{x_u(u_0,v_0),\ x_v(u_0,v_0)\}\text{"}}$

v_P vektörü M yüzeyinin tanjant vektörü ise x_u ve x_v nin lineer birleşimi olarak yazılmalı

☆ Yüzey Üzerinde Diferansiyel Formlar

Tanım: ☆

$M \subset E^2$ bir yüzey olsun.

$f: M \to \mathbb{R}$ reel değerli dif.bilir fonksiyonunu M'de bir 0-form denir.

$\Phi: T_pM \to \mathbb{R}$ lineer dönüşüme 1-form denir

$$v_p \longrightarrow \Phi(v_p)$$

$\xi: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon anti-simetrik (alterne) ve

$(v_p, w_p) \to \xi(v_p, w_p)$ iki lineer ise ξ'ye M'de 2-form denir.

Not:

<u>Bilineer</u>

$$\xi(a\vec{u_p} + b v_p + \vec{w_p}) = a\xi(u_p + w_p) + b\xi(v_p + w_p)$$

$$\xi(\vec{u_p}, a\vec{v_p} + b\vec{w_p}) = a\xi(u_p, v_p) + b\xi(u_p, w_p)$$

<u>Alterne</u>

$\xi(v_p, w_p) = -\xi(w_p, v_p) \Rightarrow \xi(v_p, v_p) = 0$ elde edilir.

Not: M yüzeyi 2-boyutlu olduğundan $p > 2$ için p-formlar sıfırdır.

Tanım: (Dış Çarpım)

Φ ve Ψ, ξ^3 uzayından M yüzeyi üzerinde iki 1-form olsun. v_p, w_p teğet vektörler ise o.ü.,

$$\xi: \xi^1(M) \times \xi^1(M) \to \xi^2(M)$$

$$(\Phi, \Psi) \longrightarrow (\Phi, \Psi) = \Phi \wedge \Psi : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$(v_p, w_p) \to (\Phi \wedge \Psi)(v_p, w_p)$$

$$= \Phi(v_p)\Psi(w_p) - \Phi(w_p)\Psi(v_p)$$

Şeklinde tanımlı $\underbrace{\Phi \wedge \Psi}_{\text{2-form}}$ fonksiyonu denir.

* Φ p- form
Ψ q- form $\Big\}$ (Dış çarpımları)
$\{\Phi \wedge \Psi$: p+q - form

$$(dx \wedge dy)\left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dy}\right) = \underbrace{dx\left(\frac{d}{dx}\right)}_{1} \underbrace{dy\left(\frac{d}{dy}\right)}_{1} - \underbrace{dx\left(\frac{d}{dy}\right)}_{0} \underbrace{dy\left(\frac{d}{dx}\right)}_{0} = 1$$

$$(dx \wedge dy)\left(\frac{d}{dy} \cdot \frac{d}{dx}\right) = dx\left(\frac{d}{dy}\right) dy\left(\frac{d}{dx}\right) - dx\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot dy\left(\frac{d}{dy}\right) = 1$$

Teorem: M, E^3 uzayında bir yüzey olsun.

Φ, Ψ, Υ birer 1- form o.ü.,

1) $\Phi \wedge \Psi = -\Psi \wedge \Phi$
2) $\Phi \wedge \Phi = 0$
3) $\Phi \wedge (\Psi + \Upsilon) = (\Phi \wedge \Psi) + (\Phi \wedge \Upsilon)$

özelliklerini sağlar.

İspat:

1) $$(\Phi \wedge \Psi)_{(v_p, w_p)} = \Phi(v_p)\,\Psi(w_p) - \Phi(w_p)\,\Psi(v_p)$$
$$= -\left(\Phi(w_p)\,\Psi(v_p) - \Phi(v_p)\,\Psi(w_p)\right)$$
$$= -(\Psi \wedge \Phi)(v_p, w_p)$$

2) $$(\Phi \wedge \Phi)_{(v_p, w_p)} = \Phi(v_p) \cdot \Phi(w_p) - \Phi(v_p) \cdot \Phi(w_p) = 0$$

0- form f, g, h
1- form $f\,dx + g\,dy + h\,dz$
2- form $f\,dx\,dy + g\,dx\,dz + h\,dy\,dz$
3- form $f\,dx\,dy\,dz$

Örnekler:

1) $\left.\begin{array}{l}\phi = x\,dx - y\,dy \\ \psi = z\,dx + x\,dz\end{array}\right\}$ 1- form $\qquad \phi \wedge \psi = ?$

$$\phi \wedge \psi = (x\,dx - y\,dy) \wedge (z\,dx + x\,dz)$$
$$= xz\,dx \wedge dx + x^2\,dx \wedge dz - yz\,dy \wedge dx - y \cdot x\,dy \wedge dz$$
$$= 0 + x^2\,dx \wedge dz + yz\,dx \wedge dy - yx\,dy \wedge dz$$
$$= x^2\,dx \wedge dz + yz\,dx \wedge dy - yx\,dy \wedge dz$$

2- formdur.

2) $\left.\begin{array}{l}\phi = x\,dx - y\,dy \\ \psi = z\,dx + x\,dz \\ \theta = z\,dy\end{array}\right\}$ 1- form $\qquad \phi \wedge \psi \wedge \theta = ?$

$$\phi \wedge \psi \wedge \theta = (x\,dx - y\,dy)(z\,dx + x\,dz)(z\,dy)$$
$$= (x^2\,dx \wedge dz + yz\,dx \wedge dy - yx\,dy \wedge dz) \wedge (z\,dz)$$
$$= -x^2 z\,dx \wedge dy \wedge dz$$

3- formdur.

Ör $M = \{(x,y,z) : 3x^2y - y^3z^2 - 2 = 0\} \subset E^3$ yüzeyinin $P(1,-2,-1)$ noktasındaki birim normalini ve teğet düzlem denklemini bulunuz.

$$g(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2 - 2$$

$$\nabla g = \operatorname{grad} g \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$
$$= \operatorname{grad} g \in T_P(M)^{\perp}$$

$$\nabla g_{|P} = (6xy,\ 3x^2 - 3y^2z^2,\ 2y^3z)_{(1,-2,-1)} = (-12, -9, -16)$$

$$\|\nabla g_{|P}\| = \sqrt{36x^2y^2 + 9x^4 + 9y^4z^4}_{(1,-2,1)} = \sqrt{481}$$

$$N_P = \frac{\nabla g_{rP}}{\|\nabla g_{rP}\|} = \frac{1}{\sqrt{481}}(-12,-9,-16) \longrightarrow P \text{ noktasındaki birim normal}$$

$X = (x,y,z) \in T_P M$ olsun. $\vec{PX} = (x-1, y+2, z-1)$

$$\langle PX, N_P\rangle = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{481}}\langle(-12,-9,-16),(x-1,y+2,z+1)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{481}}(-12x+12-9y-18-16z-16) = 0$$

$= 12x+9y+16z = -22 \rightarrow P$ noktasındaki Teğet düzleminin denklemi

Ör $X(u,v) = (\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v)$ birim küre yüzeyinin $P = X(\frac{\pi}{2},0)$ noktasındaki teğet düzlemini yazınız. Düzlemin normalini bulunuz.

$$P = X(\tfrac{\pi}{2},0) = (0,1,0)$$

$X_u = (-\sin u\cos v, \cos u\cos v, 0) = X_u(\frac{\pi}{2},0) = (-1,0,0)$

$X_v = (-\cos u\sin v, -\sin u\sin v, \cos v) = X_v(\frac{\pi}{2},0) = (0,0,1)$

$N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \boxed{(0,1,0)} \longrightarrow P = (0,1,0)$ veya $X(\frac{\pi}{2},0)$ noktasındaki normal vektörü

$X = (x,y,z)$ için $\vec{PX} = (x, y-1, z)$

$$\langle N, PX\rangle = \langle(0,1,0),(x,y-1,z)\rangle = 0$$
$$\Rightarrow y-1=0$$
$$\Rightarrow \boxed{y=1}$$

Ör $X(u,v) = (u^2, u^3, v)$ yarma olup olmadığını gösteriniz.

1:1'lik

$$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2)$$
$$(u_1^2, u_1^3, v_1) = (u_2^2, u_2^3, v_2)$$

$\Rightarrow u_1^2 = u_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} u_1^3 = u_2^3 \\ v_1 = v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 = u_2 \Big\} (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

old. X 1:1 dir.

Regülerlik

I. yol:

$$J(X(u,v)) = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$u=0$ için rank $J(X(u,v)) = 1$ olur. $u=0$ için regüler değildir.

II. yol:

$X_u = (2u, 3u^2, 0)$

$X_v = (0, 0, 1)$

$X_u \times X_v = (3u^2, -2u, 0)$

$u = 0$ için $(0,0,0)$ olur. regüler değildir.

$\longrightarrow$ X yama değildir.

Ör $X(u,v) = (u, u^2, u+v^2)$ nin yama olup olmadığını kontrol edinit.

1:1 lik

$X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$

$(u_1, u_1^2, u_1+v_1^2) = (u_2, u_2^2, u_2+v_2^2$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ u_1^2 = u_2^2 \\ u_1+v_1^2 = u_2+v_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1^2 = v_2^2 \end{array}$$

$u_1 = u_2$ dir fakat $v_1^2 = v_2^2$ iken $v_1 = v_2$ olmak zorunda değildir.

Örneğin; $v_1 = 1$, $v_2 = -1$

$\Rightarrow$ X yama değildir.

Ör $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v) \to X(u,v) = \left(u+2v, \frac{uv}{2}, u-v\right)$ has yama mıdır?

1:1 lik

$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2)$

$\left(u_1+2v_1, \frac{u_1v_1}{2}, u_1-v_1\right) = \left(u_2+2v_2, \frac{u_2v_2}{2}, u_2-v_2\right)$

$\Rightarrow u_1 = u_2 \quad , \quad v_1 = v_2$ bulunur.

Regülerlik

$$J(X(u,v)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{v}{2} & \frac{u}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ dır.}$$

X, Regülerdir

Tersini bulup sürekli mi? bakalım.

$X^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$X(u,v) = X^{-1}(X(u,v)) = (u,v)$

$= X^{-1}\left(\underbrace{u+2u}_{x}, \underbrace{\frac{uv}{2}}_{y}, \underbrace{u-v}_{z}\right)$

$$\left.\begin{aligned} x &= u+2u \\ y &= uv \\ z &= u-v \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = \frac{x+2z}{3}, \quad v = \frac{x-z}{3}$$

$X^{-1}(x,y,z) = (u,v) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{x-z}{3}\right)$

Tersi var ve sürekli

$\Rightarrow$ X has yamadır.

08/04/2025

Dış Türev

M yüzeyi üzerinde $f: M \to \mathbb{R}$ 0-form dış türevi: df

$$df|(v_p) = v_p[f] \; ; \; df|T_pM \to \mathbb{R}$$

$$v_p \to df(v_p) = v_p[f] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i$$

Teorem: M, E^3 uzayında bir uzay olsun. f ve g, M yüzeyi üzerinde tanımlı reel değerli iki dif. bilir fonksiyon, ϕ ve α yüzey üzerinde 1-form o.ü.,

1- d dış türev operatörü lineerdir

2- $d(f.g) = g.df + f dg$

3- $d(f.\phi) = df \wedge \phi + f \wedge d\phi$

4- $d(df) = 0 \equiv d^2 f = 0$

Ör $\phi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ 1-form

$d\phi = df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz \to$ 2-form

$\phi = x dy$, $\alpha = x^2 dy$

$d\phi = dx \wedge dy$, $d\alpha = 2x dx \wedge dy$

* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonk.

$(u_1, u_2) \to f(u_1, u_2)$

$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2$

dif geo1 notlarından bak

Ör $\phi = e^{xy} dx + 3z dy - xy dz$, $d\phi = ?$

$$d\phi = (y e^{xy} dx + x e^{xy} dy) \wedge dx + 3 dz \wedge dy - (y dx + x dy) \wedge dz$$

$$= -x e^{xy} dx \wedge dy - 3 dy \wedge dz - y dx \wedge dz - x dy \wedge dz$$

$$= \boxed{-x e^{xy} dx \wedge dy + (-3 - x) dy \wedge dz - y dx \wedge dz}$$

Ör $a = 3dx + dy$, $b = 2dx + 3dy$ dış çarpımını bulunuz.

$$a \wedge b = (3dx + dy) \wedge (2dx + 3dy)$$

$$= \overbrace{6\, dx \wedge dx}^{0} + 9\, dx \wedge dy + \overbrace{2\, dy \wedge dx}^{-} + \overbrace{3\, dy \wedge dy}^{0}$$

$$= 7\, dx \wedge dy$$

Ör $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ o.ü., $du \wedge dv = ?$ Sınıf sınavı 12P

$$du = 2x\, dx - 2y\, dy$$

$$dv = 2y\, dx + 2x\, dy$$

$$du \wedge dv = (2x\, dx - 2y\, dy) \wedge (2y\, dx + 2x\, dy)$$

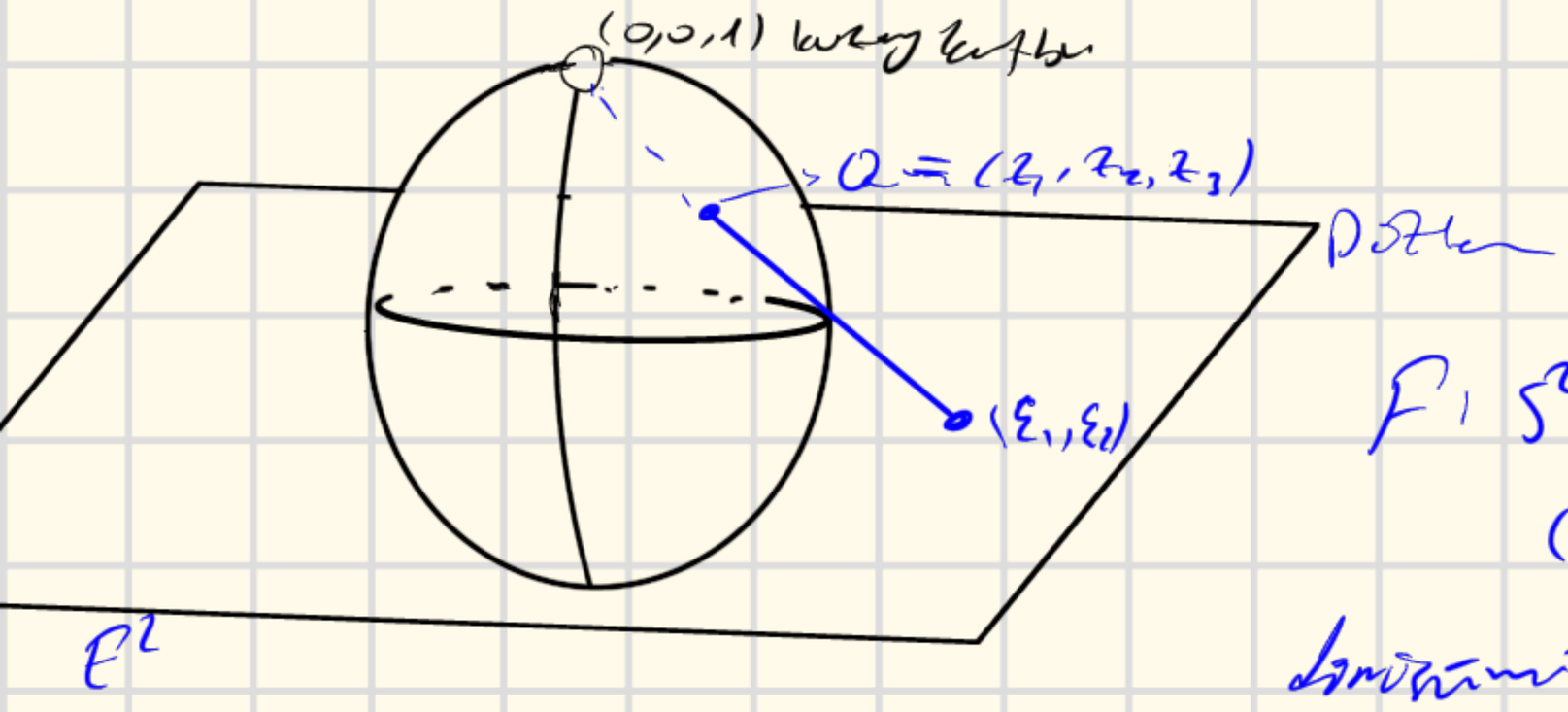
$$= 4x^2\, dx \wedge dy + 4y^2\, dx \wedge dy$$

$$= (4x^2 + 4y^2)\, dx \wedge dy$$

Tanım: M, N, E^3'te iki yüzey olsun. $f: M \to N$ bir dönüşüm $X: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$'nin bir yaması, $Y: E \subset \mathbb{R}^2 \to N$'nin bir yaması o.ü.

$Y^{-1} \circ f \circ X : D \to E$ dönüşümü diferansiyelleniyor ise f'ye diferansiyelleniyor denir.

Ör (Steografik İzdüşüm)

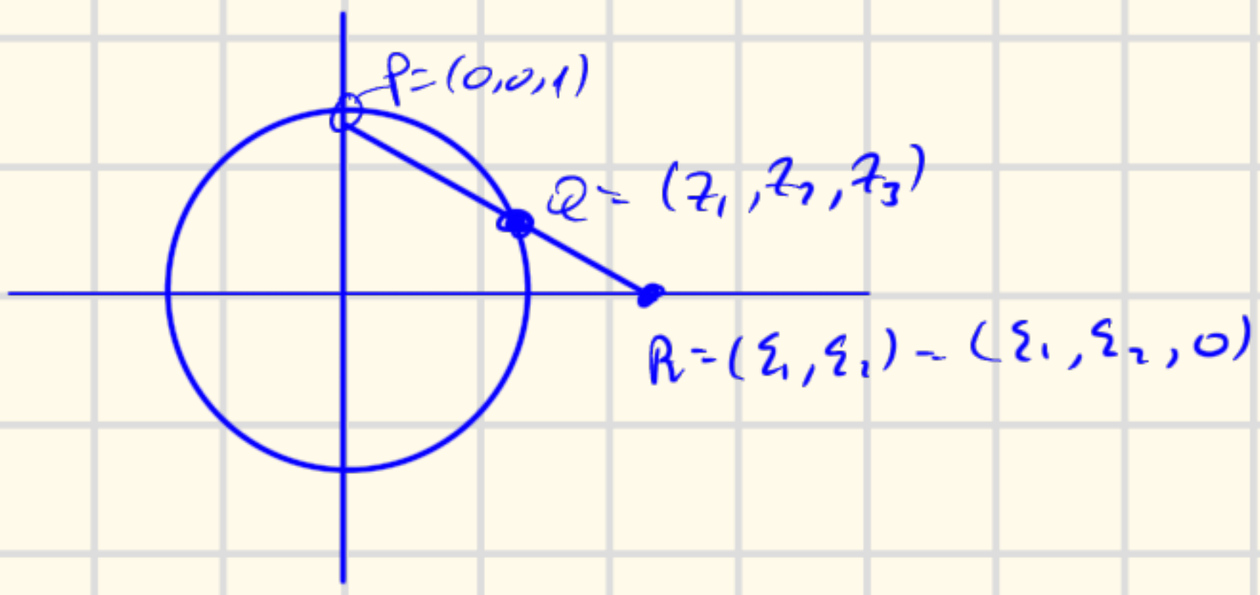


$$F : S^2 - \{(0,0,1)\} \to E^2$$

$$(z_1, z_2, z_3) \to (\xi_1, \xi_2)$$

dönüşümü elde edilir mi?

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = r^2$$



$$RQ = \lambda RP$$

$$(z_1 - \xi_1, z_2 - \xi_2, z_3) = \lambda(\xi_1, \xi_2, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 - \xi_1 &= -\lambda \xi_1 \\ z_2 - \xi_2 &= -\lambda \xi_2 \\ z_3 &= \lambda \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{z_1}{1 - z_3} \\ \xi_2 &= \frac{z_2}{1 - z_3} \end{aligned}$$

Tanım: M, N E^3'te iki yüzey ve $f: M \to N$ bir dönüşüm olsun.

$P \in M$ o.ü.

$$f_*: T_PM \to T_{f(P)}N$$
$$v_P \to f_*(v_P)$$

lineer dönüşümüne f'nin $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü denir.

Tanım: $f: M \to N$
$P \to f(P)$ dönüşümü verilsin. Eğer

$f_{*P} | T_PM \to T_{f(P)}N$ türev dönüşümü 1:1 ise f'ye regüler bir dönüşüm denir.

Tanım: $f: M \to N$ diferansiyelli bir dönüşüm olsun. Eğer f^{-1} mevcut ve türevlenebilir ise f'ye diffeomorfizm denir.

Yüzeylerin Topolojik Özellikleri

Tanım: $M \subset E^3$'te bir yüzey olsun. p, q: M'nin keyfi iki noktası olsun. Eğer p'den q'ya M'nin bir sürekli eğri parçası var ise yüzeye bağlantılıdır denir.

Ör Küre yüzeyi bağlantılı yüzeydir.
Silindir, Tor, Tek kanatlı hiperboloid bağlantılı yüzeydir.

Tanım: M yüzeyi sonlu sayıda 2-segmentleri yardımıyla örtülüyorsa M'ye kompakt yüzey denir

Ör Küre yüzeyi kompakttır.

Tanım (Maksimum Prensibi): f fonksiyonu R: $\begin{matrix} a \leq u < b \\ c \leq v < d \end{matrix}$ bölgesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. ($f: R \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{sürekli}]{} \mathbb{R}$)

Bu takdirde f fonksiyonu R'nin bazı noktalarında maksimum değere sahiptir.

Önerme: $M \subset E^3$'te bir yüzey ve $K \subset M$'de bir kompakt bölge olsun.

$f: K \subset M \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise, K'nın en az bir noktasında maksimum değeri alır.

Not!! f fonksiyonu M nin herhangi noktasında maksimum değer almıyorsa M yüzeyi kompakt değildir.

Sinan Burayan Dertler

14/04/2025

Yönlendirilebilirlik

Ö Möbius şeridi üzerinde bazı noktalarda normal vektörü ile, bazı noktalarda ters yönlü old. farklı normal vektör olmuş sayılmıştık. (Klein şişesi de buna örnektir.)

Silindir, tor, Düzlem, küre yönlendirilebilir yüzeylerdir.

Yüzeyler Üzerinde Şekil Operatörü (kesin çıkar final, büt)

M, E^3'te bir yüzey ve $P \in M$. N, M'nin birim normal vektör alanı olsun. $v_P \in T_PM$ o.ü., M yüzeyinin şekil operatörü

$$S_P : T_PM \to T_PM$$
$$v_P \to -\nabla_{v_P} N$$
$$S_P(v_P) = -\nabla_{v_P} N$$

Şeklinde tanımlanan dönüşümdür.

Teorem: $M \subset E^3$ te bir yüzey $P \in M$ olsun. $S_P : T_PM \to T_PM$ dönüşümü lineer ve özeşlenikdir.

İspat: $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall v_P, w_P \in T_PM$ için

$$S_P(av_P + bw_P) = -\nabla_{av_P - bw_P} N$$
$$= -a\nabla_{v_P} N - b\nabla_{w_P} N$$
$$= a S(v_P) + b S_P(v_P)$$

$$\langle N, v_P \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_{w_P} N, v_P \rangle + \langle N, \nabla_{w_P} v_P \rangle = 0 \qquad (1)$$

$$\langle N, w_P \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_{v_P} N, w_P \rangle + \langle N, \nabla_{v_P} w_P \rangle = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{v_P} N, w_P \rangle + \langle N, \nabla_{v_P} w_P \rangle - \langle \nabla_{w_P} N, v_P \rangle - \langle N, \nabla_{w_P} v_P \rangle = 0$$

$$= \langle N, \nabla_{v_P} w_P - \nabla_{w_P} v_P \rangle + \langle \nabla_{v_P} N, w_P \rangle - \langle \nabla_{w_P} N, v_P \rangle = 0$$

$$= \langle N, \underbrace{[v_P, w_P]}_{=0} \rangle - \langle S_P(v_P), w_P \rangle + \langle S_P(w_P), v_P \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle S_p(w_p), v_p\rangle = \langle S_p(v_p), w_p\rangle = 0}$$

Or $S_0^2(r)$, $x^2+y^2+z^2=r^2$ (Esfera)

$$N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{(x,y,z)}{r} \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

$$v = (-y,x,0) \in \mathfrak{X}(M) \quad , \quad \boxed{\langle N, v\rangle = 0}$$

$$\nabla_v N = (v[N_1], v[N_2], v[N_3])$$

$$= (\langle \operatorname{grad} N_1, v\rangle, \langle \operatorname{grad} N_2, v\rangle, \langle \operatorname{grad} N_3, v\rangle)$$

$$= (\langle (\tfrac{1}{r},0,0),(-y,x,0)\rangle, \langle (0,\tfrac{1}{r},0),(-y,x,0)\rangle, \langle (0,0,\tfrac{1}{r}),(-y,x,0)\rangle)$$

$$= \left(\frac{-y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right)$$

$$= \frac{1}{r}(-y,x,0) = \frac{v}{r}$$

$$-\nabla_{v_p} N = \boxed{S_p(v) = \frac{-v}{r}}$$

$$w = (-z,0,x) \in \mathfrak{X}(M) \quad , \quad \boxed{\langle w, N\rangle = 0}$$

$$\nabla_w N = (w[N_1], w[N_2], w[N_3])$$

$$= \langle (\tfrac{1}{r},0,0),(-z,0,x)\rangle, (0,\tfrac{1}{r},0), (-z,0,x)\rangle, \langle (0,0,\tfrac{1}{r}),(-z,0,x)\rangle)$$

$$= \left(\frac{-z}{r}, 0, \frac{x}{r}\right) = \frac{w}{r}$$

$$\boxed{S_p(w) = -\nabla_w N = \frac{-w}{r}} = cv + dw \Rightarrow \boxed{c=0,\ d=-\frac{1}{r}}$$

$$S_p = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Ör Düzlem

$$ax+by+cz+d=0 \Rightarrow N=\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \text{sbt}$$

Herhangi $v_p \in T_pM$ için $\nabla_{v_p} N = 0 \Rightarrow S_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$S_p(v_p)=0$$

Ör Silindir

$$C \; - - - \; x^2+y^2=1$$

$$N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = (x,y,0) \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$$

$v=(0,0,1)$ ve $w=(-y,x,0)$, $\langle v,N\rangle = \langle w,N\rangle = 0$

$$\nabla_{v_p} N = (v[N_1], v[N_2], v[v_3])$$

$$= (\langle (1,0,0),(0,0,1)\rangle, \langle (0,1,0),(0,0,1),0)$$

$$= (0,0,0) = \vec{0}$$

$S_p(v) = 0 = av+bw$, $\boxed{a=b=0}$

$$\nabla_w N = (w[N_1], w[N_2], w[N_3])$$

$$= (\langle (1,0,0),(-y,x,0)\rangle, \langle (0,1,0),(-y,x,0), 0)$$

$$= (-y,x,0) = w$$

$S_p(w) = -w = cv+dw \Rightarrow \boxed{c=0,\ d=-1}$

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı

$\mathbb{R}^3$ te bir M yüzeyi üzerinde şekil operatörü S olsun.

$S: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ lineer dönüşüm olduğundan S'ye karşılık gelen matristen bahsedilebilir. $\mathfrak{X}(M)$'nin bir $\mathcal{O} = \{x, y\}$ bazı için

$$S(x) = ax + by$$
$$S(y) = cx + dy$$

O.Ü., S'nin bu baza göre matrisi $S_{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Ör $x.y = 1$ denklemi ile verilen yüzeyin şekil operatörü matrisini bulun.

$$\Phi(u, v) = \left(u, \frac{1}{u}, v\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_u &= \left(1, \frac{-1}{u^2}, 0\right) \\ \Phi_v &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\}$$

$\Phi_u \perp \Phi_v$ olduğundan $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ lineer bağımsızdır. $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ $\mathfrak{X}(M)$ için bazdır.

ortonormal baz

$V_1 = \dfrac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}$, $V_2 = \dfrac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|}$ O.Ü. $\{V_1, V_2\}$: $\mathfrak{X}(M)$ için ortonormal baz.

$$\|\Phi_u\| = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^2}, \quad \|\Phi_v\| = 1$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}(u^2, -1, 0), \quad V_2 = (0, 0, 1)$$

$$N = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{(-1, -u^2, 0)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\left.\begin{aligned} S(V_1) &= aV_1 + bV_2 \\ S(V_2) &= cV_1 + dV_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \langle S(V_1), V_1 \rangle, & c &= \langle S(V_2), V_1 \rangle \\ b &= \langle S(V_1), V_2 \rangle & d &= \langle S(V_2), V_2 \rangle \end{aligned}$$

$$S(V_1) = S\left(\frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}\right) = \frac{1}{\|\Phi_u\|} \cdot \underbrace{S(\Phi_u)}_{-\nabla_{\Phi_u} N} = -\frac{1}{\|\Phi_u\|} N_u$$

$$N_u = \left(\frac{2u^3}{(1+u^4)^{2/3}} - \frac{2u}{(1+u^4)^{1/2}} + \frac{2u^5}{(1+u^4)^{3/2}}, 0\right)$$

$$S(V_1) = -\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}} N_u$$

$$a = \langle S(V_1), V_1 \rangle = \left(\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}}\right) \cdot \left(\frac{-2u^3}{(1+u^4)^2}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{1+u^4}}\right)\left(\frac{2u^3}{(1+u^4} - \frac{2u^7}{(1+u^4)^2}\right)$$

$$a = \frac{-2u^3}{(1+u^4)^{3/2}} \quad , \quad b = c = d = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} \frac{-2u^3}{(1+u^4)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bir Yüzeyin (Normal Eğrilisi):

$v_p \in T_pM$, $\|v_p\| = 1$ olsun.

$$\boxed{k(v_p) = \langle S(v_p), v_p \rangle}$$

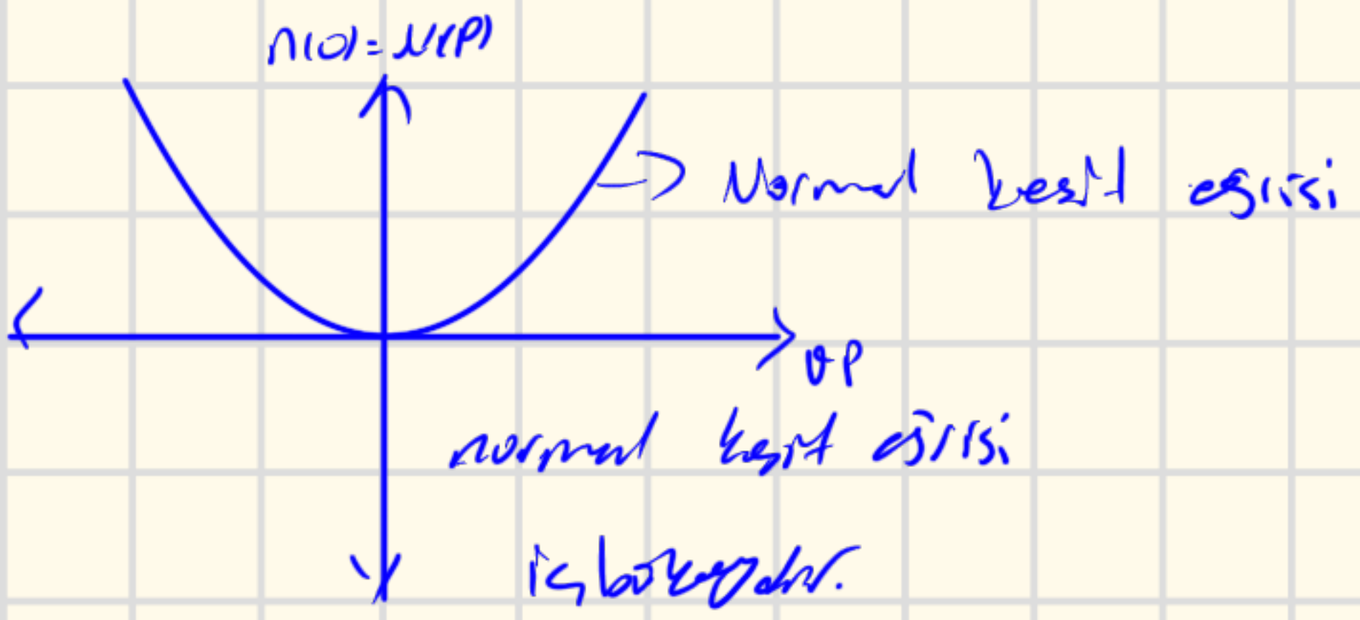
Sağlamış $\vec{v_p}$ yönündeki <u>normal eğrilik</u> denir.

Tanım (Normal Kesit Eğrisi):

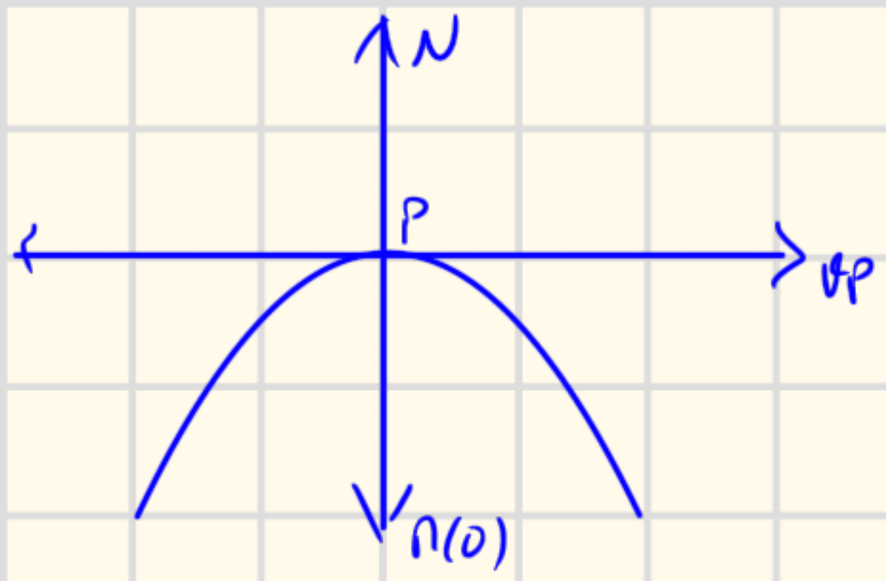
$M \subset \mathbb{R}^3$'te bir yüzey o.ü., π - - - $S_p\{v_p, N\}$ olsun.
$v_p \in T_pM$, $N \perp T_pM$ π düzlem ile M yüzeyinin arakesit eğrisine M'nin v_p yönünsel normal kesit eğrisi denir.

Sınıflandırma:

1) $\underset{\text{normal eğrilik}}{k(v_p)} > 0 \Rightarrow \underset{\text{eğrinin normali}}{n(0)} = \underset{\text{yüzeyin normali}}{N(P)} \Rightarrow$ Normal kesit eğrisinin bükümlülüğü yüzeyin normali yönünde olmaktır.



2) $k(v_p) < 0 \Rightarrow n = -N(P) \Rightarrow$ Normal kesit eğrisinin bükümlülüğü $-N$ yönünde olmaktır.



Normal kesit eğrisi dışbükeydir

3) $k(v_P) = 0 \Rightarrow$ Normal kesit eğrisi doz doğrudur.

22/04/2025

Aslı (Asal) Eğrilikler

Tanım: $M \subset \mathbb{R}^3$'te bir yüzey ve $P \in M$ olsun. P de M'nin $k(v_P)$ normal eğriliğinin maksimum ve minimum değerlerine $P \in M$ de M nin aslı eğrilikleri denir ve k_1, k_2 ile gösterilir.

$S: \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ lineer old. karakteristik değerlerden bahsedilebilir.

$P \in M$ noktasından S nin karakteristik (öz) değerlerine M nin bu noktadaki aslı eğrilikleri, bu karakteristik değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin P noktasındaki aslı eğrilik doğrultuları denir.

O halde $X_P \neq 0$ ö.ü., $S_P(X_P) = k \cdot X_P$ o.ş. $k \in \mathbb{R}$ varsa k'ya aslı eğrilik, $X_P \in T_P M$ ya da bu aslı eğrilige karşılık gelen aslı eğrilik doğrultusu denir.

Ör "Küre" nin aslı eğrilikleri nelerdir?

$$\left.\begin{aligned} S(v) &= -\frac{1}{r} v \\ S(w) &= -\frac{1}{r} w \end{aligned}\right\} k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}$$

aslı eğrilikleri

"Silindir" $x^2 + y^2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} S_P(v) &= \vec{0} = \underset{0}{k} \cdot v \\ S_P(w) &= -w = \underset{-1}{k} \cdot w \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= -1 \end{aligned}$$

aslı eğrilikler $\quad w = (-y, x, 0)$

$k(v) = \langle S(v), v \rangle = 0$

$k(w) = \langle S(w), w \rangle = \langle -w, w \rangle = \langle (y, -x, 0), (-y, x, 0) \rangle$

$= -y^2 - x^2 = -1$

Teorem: M, $\mathbb{E}^3$'te bir yüzey, S de M nin şekil operatörü olsun. S nin asli eğrilikleri T_pM deki baz seçiminde bağımsızdır.

İspat: T_pM nin iki bazı ϕ ve ψ, S nin bu bazlara karşılık gelen matrisleri de S_ϕ ve S_ψ olsun. Q regüler bir matris o.ü., bu matrisler arasında

$$S_\phi = Q \cdot S_\psi \cdot Q^{-1}$$

bağlantı vardır.

S nin asli eğrilikleri (karakteristik değerleri) karakteristik polinomun kökleridir.

$$P_{S_\phi}(\lambda) = \det(\lambda I_2 - S_\phi) = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\begin{aligned}
P_{S_\phi}(\lambda) = \det(\lambda I_2 - S_\phi) &= \det(\lambda I_2 - Q S_\psi \cdot Q^{-1}) \\
&= \det(\lambda Q \cdot Q^{-1} - Q \cdot S_\psi Q^{-1}) \\
&= \det(Q(\lambda I_2 - S_\psi) Q^{-1}) \\
&= \det Q \cdot \det(\lambda I_2 - S_\psi) \cdot \underbrace{\det Q^{-1}}_{\frac{1}{\det Q}} \\
&= \det(\lambda I_2 - S_\psi) \\
&= P_{S_\psi}(\lambda)
\end{aligned}$$

Buradan $P_{S_\phi}(\lambda) = P_{S_\psi}(\lambda)$ bulunur. O halde S'nin hangi baza göre matrisi alınırsa alınsın aynı asli eğrilikleri elde edilir. Yani: asli eğrilikler baz seçiminden bağımsızdır.

Tanım (Umbilik (Tümsek) Nokta):

$p \in M \subset \mathbb{R}^3$ teki bütün birim tanjant $\vec{v}_p$ yönündeki normal eğrilik $\forall v_p$ için $k(v_p) = \text{sbt}$ ise p noktasına umbilik nokta denir.

Yüzeyin Kuadratik Yaklaşımı

M: $z = f(x,y)$ yüzeyini göz önüne alalım. ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonk.)

$k_1 = f_{xx}^{\circ}$, $k_2 = f_{yy}^{\circ}$ → asli eğrilikler

$$z = f(x,y) \cong \frac{1}{2}\left[k_1 x^2 + k_2 y^2\right] \quad \text{Yüzeyin kuadratik yaklaşımı}$$

Ör $z = e^{x^2+y^2} - 1$ yüzeyinin orjin civarındaki quadratik yaklaşımını bulunuz.

$k_1 = f_{xx}$, $k_2 = f_{yy}$

$f_x = 2xe^{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f_y = 2ye^{x^2+y^2}$

$f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f_{yy} = 2ye^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2}$

$\rightarrow k_1 = f_{xx}^{\circ} = 2$ $\qquad$ $\rightarrow k_2 = f_{yy}^{\circ} = 2$

$z = f(x,y) \cong \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \cong \frac{1}{2}(2x^2+2y^2) \cong x^2+y^2$

$z = x^2+y^2 \rightarrow$ eliptik paraboloid

Tanım (Gauss-eğrilişi — ortalama eğrilik)

$M \subset E^3$'de bir yüzey, $P \in M$ ve

$S_P : T_PM \rightarrow T_PM$ lineer dönüşüm M nin şekil operatörü olsun.

$K : M \rightarrow M$

$P \rightarrow K(P) = \det S_P$ reel değerli fonksiyona M nin Gauss eğrilişi fonksiyonu denir.

$K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M yüzeyinin P noktasındaki Gauss eğrili denir.

$$S_P = \begin{bmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{bmatrix}, \quad \det S_P = k_1 . k_2$$

$H : M \rightarrow \mathbb{R}$

$P \rightarrow H(P) = \frac{1}{2} \operatorname{iz} S_P$

reel değerli fonksiyona M'nin <u>ortalama eğrilik fonksiyonu</u> denir. $H(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M yüzeyinin P noktasındaki <u>ortalama eğrilişi</u> denir.

Gauss Eğriliğinin Geometrik Yorumu

1) $K(P) > 0 \Rightarrow k_1(P) . k_2(P) > 0$

$\Rightarrow k_1(P) > 0$ ve $k_2(P) > 0$ veya $k_1(P) < 0$ ve $k_2(P) < 0$

$$z = \frac{1}{2}\left(k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2\right)$$

P nin civarında yüzeyin quadratik yaklaşımı eliptik Paraboloid olacak.

2) $K(P) < 0 \Rightarrow k_1(P) \cdot k_2(P) > 0 \Rightarrow k_1$ ve k_2 ait İşaretli olacak

$$z = \frac{1}{2}\left(k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2\right)$$

quadratik yaklaşımı hiperbolik Paraboloid

3) $K(P) = 0 \Rightarrow$ i) $k_1(P) = 0$, $k_2(P) \neq 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}kx^2$ Parabolik silindir.

ii) $k_1(P) = 0$, $k_2(P) = 0 \Rightarrow z = 0$ yani P nin civarında yüzey düzlem olacaktır.

Not: Küre her zaman pozitif Gauss eğrilikli dir. $S_P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$ $\boxed{k = \frac{1}{r^2}}$

Silindrin Gauss eğriliği sıfırdır. $S_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$ $k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$

$H = \frac{1}{2} \operatorname{iz} S = \frac{1}{2r}$

Tek kanatlı hiperboloid Gauss eğrili negatiftir.

Torus

Yüzeyin dış yarısında $k > 0$

" iç " $k < 0$

Üst ve alt çemberler üzerindeki noktalarda $k = 0$

Önerme: $M \subset E^3$ yüzeyinin asli eğrilikleri

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - k} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - k} \end{aligned}}$$ ile de bulunabilir.

Tanım: $M \subset E^3$ yüzeyi olsun.

$k = 0 \Rightarrow$ yüzeye flat (düzlemsel) yüzey denir. (örnek Silindir, düzlem, Tor)

$H = 0 \Rightarrow$ " Minimal yüzey denir. (örnek Helikoid yüzey)

29/04/2025

Teorem: M, E^3 te bir kompakt regüler yüzey olsun. k Gauss eğriliğinin kesin pozitif olduğu $P \in M$ noktası vardır.

Sonuç: E^3 te Gauss eğriliği her yerde negatif ya da sıfır olan herhangi bir yüzey non-kompaktır.

Teorem: E^3 uzayında M bağlantılı regüler yüzeyinin tüm noktaları umbilik noktası ise ($\forall P \in M$ için $S_P = \lambda(P) I$), yüzeyin k Gauss eğriliği sabittir ve $k \geq 0$ dır. (küre, $k = \frac{1}{r^2}$)

→ sınav → defterden yapılıyor

Teorem: E^3 Öklid uzayında bir M yüzeyinin Gauss eğriliği T_PM uzayındaki baz seçiminden bağımsızdır.

Teorem: E^3 Öklid uzayında bir M regüler yüzeyinin <u>ortalama eğriliği</u> T_PM uzayındaki baz seçiminden bağımsızdır.

İspat: T_PM uzayındaki farklı iki baz ϕ ve χ olsun. S şekil operatörünün bu bazlara göre matrisi sırasıyla S_ϕ ve S_χ olsun. O halde

$$S_\chi = \Phi . S_\phi . \Phi^{-1}$$

o.ş. bir tek Φ regüler matrisi vardır.

$$\begin{aligned} iz\, S_\chi &= iz(\Phi . S_\phi \Phi^{-1}) \\ &= iz(\Phi^{-1}(\Phi . S_\phi)) \\ &= iz\, S_\phi \end{aligned}$$

O halde H ortalama eğrilik tanımı gereğince yüzeyin ortalama eğriliği baz seçiminden bağımsız olduğu sonucu elde edilir.

Hesaplama Teknikleri → sınavda kesin var (gauss eğriliği)

$X: D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ bir yama olsun.

$(u,v) \to X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \|X_u\|^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \|X_v\|^2 \end{aligned}}$$

bu reel değerli fonksiyonlara 1. temel form katsayıları denir.

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{EG-F^2} > 0 \quad , \quad N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$ birim normal vektörü

$$e = \langle S(X_u), X_u \rangle = \langle -\nabla_{X_u} N, X_u \rangle$$
$$= \langle -N_u, X_u \rangle$$
$$= \boxed{\langle X_{uu}, N \rangle}$$

$$f = \langle S(X_u), X_v \rangle = \langle -\nabla_{X_u} N, X_v \rangle$$
$$= \langle -N_u, X_v \rangle$$
$$\boxed{= \langle X_{uv}, N \rangle}$$

$$g = \langle S(X_v), X_v \rangle = \langle -\nabla_{X_v} N, X_v \rangle$$
$$= \langle -N_v, X_v \rangle$$
$$= \boxed{\langle X_{vv}, N \rangle}$$

$$\langle X_u, N \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, N \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, \frac{\partial}{\partial u} N \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, \nabla_{X_u} N \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, -S(X_u) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\langle S(X_u), X_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle}$$

Gauss eğrilliği

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

ortalama eğrilik

$$H = \frac{eG + gE - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

Ör (Helikoid yüzeyi)

$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$, $b \neq 0$ o.ü; Gauss ve ortalama eğrilliğini bulunuz.

$$X_u = (\cos v, \sin v, 0)$$
$$X_v = (-u\sin v, u\cos v, b)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1$$
$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$
$$G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 + b^2$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(b\sin v, -b\cos v, u)}{\sqrt{u^2+b^2}}$$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \langle (0,0,0), N \rangle = 0$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \left\langle (-\sin v, \cos v, 0), \left(\frac{(b\sin v, -b\cos v, b)}{\sqrt{u^2+b^2}} \right) \right\rangle = \frac{-b}{\sqrt{b^2+u^2}}$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \left\langle (-u\cos v, -u\sin v, 0), \left(\frac{(b\sin v, -b\cos v, u)}{\sqrt{b^2+u^2}} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+u^2}} (-ub\cos v\sin v + ub\cos v\sin v + 0) = 0$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 - \frac{b^2}{b^2+u^2}}{u^2+b^2} = \frac{-b^2}{(u^2+b^2)^2}$$

$$H = \frac{\overset{0}{\hat{e}}G + \overset{0}{\hat{g}}E - 2\overset{\to 0}{\hat{f}}F}{2(EG-F^2)} = \frac{0+0-0}{2(u^2+b^2)} = 0$$

Ör M. — x^2+y^2 silindirin yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini bulunuz.

$X(u,v) = (r\cos u, r\sin v, v)$

$X_u = (-r\sin u, r\cos u, 0)$

$X_v = (0, 0, 1)$

$X_u \times X_v = (r\cos u, r\sin u, 0)$

$$N = \frac{(r\cos u, r\sin u, 0)}{r} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

$$\left.\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \\ G &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ F &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \end{aligned}\right\} \text{1. temel form}$$

$\Rightarrow X_{uu} = (-r\cos u, -r\sin u, 0)$

$X_{uv} = (0,0,0)$

$X_{vv} = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = r \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0 \end{aligned}\right\} \text{2. Temel katsayıları}$$

$K = \frac{0}{r^2} = 0$, $H = \frac{-r+0-2.0}{2r^2} = \boxed{\frac{-1}{2r}}$

Ana Eğrilikleri:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = \frac{-1}{2r} + \sqrt{\frac{1}{4r^2}} = 0$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = \frac{-1}{2r} - \sqrt{\frac{1}{4r^2}} = -\frac{1}{r}$$

Ör $X(u,v) = (r\cos v \cos u, r\cos v \sin u, r\sin v)$ küre yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini bulunuz.

$$X_u = (-r\cos v \sin u, r\cos v \cos u, 0)$$

$$X_v = (-r\sin v \cos u, -r\sin v \sin u, r\cos v)$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r\cos v \sin u & r\cos v \cos u & 0 \\ -r\sin v \cos u & -r\sin v \sin u & r\cos v \end{vmatrix} = (r^2\cos^2 v \cos u, r^2\cos^2 v \sin u, r^2\cos v \sin v)$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{r^4\cos^4 \cos^2 u + r^4\cos^4 v \sin^2 u + r^4\cos^2 \sin^2 v} = \sqrt{r^4\cos^2 v} = r^2\cos v$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2\cos^2 v \sin^2 v + r^2\cos^2 v \cos^2 u = r^2\cos^2 v$$

$$F = \langle X_v, X_u \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = r^2\sin^2 v \cos^2 u + r^2\sin^2 v \sin^2 u + r^2\cos^2 v = r^2\sin^2 v + r^2\cos^2 v = r^2$$

$$X_{uu} = (-r\cos v \cos u, -r\cos v \sin u, 0)$$

$$X_{uv} = (r\sin v \sin u, -r\sin v \cos u, 0)$$

$$X_{vv} = (-r\cos v \cos u, -r\cos v \sin u, -r\sin v)$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = r\cos^2 v \cos^2 u - r\cos^2 v \sin^2 u = -r\cos^2 v$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = r\sin v \cos v \sin u \cos u - r\sin v \cos u \cos v \sin u = 0$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = -r\cos^2 v \cos^2 u - r\cos^2 v \sin^2 v - \sin^2 v = -r\cos^2 v - r\sin v = -r$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r^2\cos^2 v}{r^4\cos^2 v} = \frac{1}{r^2}$$

$$H = \frac{eG + Eg - 2Ff}{2(EG - F^2)} = \frac{-r^3\cos^2 v - r^3\cos^2 v}{2r^4\cos^2 v} = \frac{-2r^3\cos^2 v}{2r^4\cos^2 v} = -\frac{1}{r}$$

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = -\frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}} = -\frac{1}{r}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -\frac{1}{r} - \sqrt{0} = -\frac{1}{r}$$

Birinci Temel Form

$X(u,v)$ yüzeyinin parametrizasyonu ve α, yüzey üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda

$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ olur.

$$\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = \boxed{X_u\frac{du}{dt} + X_v\frac{dv}{dt}} \quad (1)$$

Eğrinin yay uzunluğu

$$s = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\,dt$$

$$ds = \|\alpha'(t)\|\,dt$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle \quad (1) \text{ kullanırsak}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\langle X_u\frac{du}{dt} + X_v\frac{dv}{dt},\ X_u\frac{du}{dt} + X_v\frac{dv}{dt}\right\rangle$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \langle X_u, X_u\rangle\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\langle X_u, X_v\rangle\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + \langle X_v, X_v\rangle\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$\boxed{ds^2 = \underbrace{\langle X_u, X_u\rangle}_{E=g_{11}}(du)^2 + 2\underbrace{\langle X_u, X_v\rangle}_{F=g_{12}}du\,dv + \underbrace{\langle X_u, X_v\rangle}_{G=g_{22}}(dv)^2}$$

1. temel form matrisi $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G\end{bmatrix}$

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Ö: $X(u,v) = (u, v, uv)$ yüzeyinin 1. temel formunu yazınız.

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1, 0, v) \\ X_v &= (0, 1, u)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u\rangle\ 1+v^2 \\ F &= \langle X_u, X_v\rangle = uv \\ G &= \langle X_v, X_v\rangle = 1+u^2\end{aligned}$$

$$\boxed{ds^2 = (1+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (1+u^2)\,dv^2}$$

Ör $\phi(u,v) = (a\cos u, \sin u, v)$ Parametrizasyonu ile verilen $x^2+y^2=a^2$ silindirinin yay elementini bulunuz. Silindir üzerinde $\alpha(t) = \phi(t,t)$ helisinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(\pi)$ noktaları arasındaki uzunluğunu hesaplayınız.

Yüzey üzerindeki bir eğrinin uzunluğunu hesaplamadan 1. temel form, iki teğet vektör arasındaki açı ya da bölgenin alanı hesaplamalarında 1. temel form kullanılır. Eğrilik ve yüzeyin şekli ile ilgili yorumlar yapılabilmesi ve yüzeyin noktalarını karakterize etmek için 2. temel form kullanılır.

Teorem: M yüzeyinin bir Parametrizasyonu

$$\phi : U \to M$$
$$(u,v) \to \phi(u,v)$$

yüzey üzerindeki eğri

$$\alpha : I \to M$$
$$t \to \alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$$

α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ arasındaki yay uzunluğunu

$$S = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Çözüm:

$$\phi_u = (-a\sin u, a\cos u, 0)$$
$$\phi_v = (0,0,1)$$

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle = a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u = a^2$$
$$F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$$
$$G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1$$

Yüzeyin elementleri $= \boxed{ds^2 = a^2 du^2 + dv^2}$

$u = t, \quad v = t \Rightarrow du = dv = dt$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 1$$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2+1}\, dt = \sqrt{a^2+1}\,.\, t\Big|_0^{\pi} = \sqrt{a^2+1}\,.\,\pi$$

2. Temel form

Bir M yüzeyinde, $P \in M$, $\vec{v}, \vec{w} \in T_pM$ için

$$\mathrm{II}_p : T_pM \to \mathbb{R}$$
$$\vec{w} \to \mathrm{II}_p(\vec{w}) \langle S(\vec{w}), \vec{w} \rangle_p$$

$X(u,v)$ yüzeyin parametrik denklemi

$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ parametrik eğri

$$\mathrm{II}(\alpha', \alpha') = \langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle$$
$$= \left\langle S\left(X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}\right), X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right\rangle$$
$$= \left\langle \underbrace{S(X_u)}_{-\nabla_{X_u} N} \frac{du}{dt} + \underbrace{S(X_v)}_{-\nabla_{X_v} N} \frac{dv}{dt}, X \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right\rangle$$
$$= \left\langle -N_u \frac{du}{dt} - N_v \frac{dv}{dt}, X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right\rangle$$
$$= -\langle N_u, X_u \rangle \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\langle N_u, X_v \rangle \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} - \langle N_v, X_v \rangle \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$e = \langle S(X_u), X_u \rangle = \langle -\nabla_{X_u} N, X_u \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$
$$f = \langle S(X_u), X_v \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle$$
$$g = \langle -\nabla_{X_v} N, X_v \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle$$

$\mathrm{II} = e(du)^2 + 2F\,du\,dv + g(dv)^2$ yüzeyin ikinci temel formu

Ör Aşağıdaki veriler yardımıyla P noktalarının karakterlerini belirtiniz.

i) M_1, $k_1(P) = 3$, $k_2(P) = 3$, $k_1 . k_2 < 0$ old. Hiperbolik nok.

ii) M_2, $k_1(P) = uv^3$, $k_2 = u^3 v$, $(u,v) \neq (0,0)$, $k_1 . k_2 > 0$ old. eliptik

iii) M_3, $k_1(P) = 15$, $H(P) = 4$, $k(P) > 0$ old. eliptik

iv) M_4, $k(P) = -5$, $H(P) = 2$, $k(P) < 5$ hiperbolik

v) M_5, $k(P) = 0$, $H(P) = 0$, k_1 veya $k_2 = 0$ old. $k(P) = 0 \Rightarrow$ Parabolik

$k_1 = k_2 = 0$ ise düzlemsel noktadır

Yüzeylerde Özel Eğriler

Tanım: $\alpha: I \to M \subset E^3$ yüzeyinde bir regüler eğri ve S, M'nin şekil operatörü olsun.

$$\boxed{S(\alpha') = \lambda . \alpha'} \Rightarrow \alpha \text{ ya } M \text{ nin asli eğrisi (asal eğri, eğrilik çizgisi) denir.}$$

Not: Eğer M'nin her noktası umbilik noktası ise

$$S = \lambda . I_2$$

Dolayısıyla M'nin regüler her eğrisi için $S(\alpha') = \lambda \alpha'$ olduğundan α bir asli eğridir.

Ör $S = -\frac{1}{r} I_2$; $\alpha: I \to \overset{\text{küre}}{S_0^2(r)}$ regüler eğrisi aynı zamanda bir asli eğridir.

Tanım: M, E^3 uzayında bir yüzey ve $P \in M$ noktasında $v_p \neq 0 \in T_pM$ için

$$\overbrace{k(v_p)}^{\text{normal eğrilik}} = \langle S(v_p), v_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p \text{ ye bir } M \text{ yüzeyinin } P \text{ noktasındaki asimptotik yönü - doğrultusu denir}$$

Önerme: $P \in M \subset E^3$ yüzeyinin bir noktası olsun.

1) $k(P) > 0 \Rightarrow M$'nin P noktasında asimptotik yönleri yoktur.
2) $k(P) < 0 \Rightarrow P$'de tam olarak iki tane asimptotik yön vardır.
3) $k(P) = 0 \Rightarrow$ a) Eğer P düzlemsel nokta $\Rightarrow$ Her yön asimptotik yön
   b) Eğer P parabolik nokta $\Rightarrow$ Bir tane asimptotik yön var

Küre $k(P) > 0$ (1)

Silindir $k(P) = 0$ $\begin{pmatrix} k_1 = 0 \\ k_2 \neq 0 \end{pmatrix}$ (3_b)

Hiperbolik yüzey (2)

Uygulama 27/05/2025

1) $X(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$ Eğri yüzeyinin şekil operatörü matrisini, Gauss, ortalama ve asli eğrilikleri bulunuz.

$X_u = (-v\sin u, v\cos u, 0)$

$X_v = (\cos u, \sin u, 0)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} = (v\cos u, v\sin u, -v)$$

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{v^2\cos^2 u + v\sin^2 u + v^2} = v\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, -1)$$

$$S(X_u) = -\nabla_{X_u} N = -N_u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\Rightarrow S(X_u) = \frac{-1}{\sqrt{2}v} X_u + 0X_v$$

$$S(X_v) = -\nabla_{X_v} N = -N_v = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \langle S(X_u), X_u\rangle &= a \\ \langle S(X_u), X_v\rangle &= b \\ \langle S(X_v), X_u\rangle &= c \\ \langle S(X_v), X_v\rangle &= d \end{aligned}\right\} \rightarrow S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2v} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(S) = k = 0 \rightarrow \text{Gauss eğrilik}$$

$$\frac{iz(S)}{2} = H = \frac{-1}{2\sqrt{2}v} \rightarrow \text{ortalama eğrilik}$$

$$k_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}v}, \quad k_2 = 0$$

2) M: $z = xy$ Semer yüzeyi manga yaması ile $X(u,v) = (u, v, uv)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliğini bulunuz.

$X_u = (1, 0, v)$

$X_v = (0, 1, u)$

$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1+v^2$

$F = \langle X_v, X_u \rangle = uv$

$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1+u^2$

$$[I] = ds^2 = (1+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (1+u^2)\,dv^2$$

$X_u \times X_v = (-v, -u, 1)$, $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1+u^2+v^2}$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-v, -u, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{uu} = (0,0,0) \\ X_{vu} = (0,0,1) \\ X_{vv} = (0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e = \langle X_{uu}, N \rangle = 0 \\ f = \langle X_{vu}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0 \end{array}$$

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{1+u^2+v^2}}{(1+u^2)(1+v^2) - uv^2} = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$H = \frac{eG - Eg - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{-uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}$$

3) $X(u,v) = (u^2, uv, v^2)$, $u>0$ ve $v>0$ yüzeyinin I. temel form matrisini ve bu matrisin tersini bulun.

$$\left.\begin{array}{l} X_u = (2u, v, 0) \\ X_v = (0, u, 2v) \end{array}\right\} \begin{array}{l} g_{11} = E = \langle X_u, X_u \rangle = 4u^2+v^2 \\ g_{12} = F = \langle X_u, X_v \rangle = uv \\ g_{22} = G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2+4v^2 \end{array}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u^2+v^2 & uv \\ uv & u^2+4v^2 \end{bmatrix}$$

$$I = ds^2 = (4u^2+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (u^2+4v^2)\,dv^2$$

$$[I]^{-1} = \begin{bmatrix} u^2+4v^2 & -uv \\ -uv & 4u^2+v^2 \end{bmatrix}$$

4) M'nin iki farklı Parametrizasyonu

$$\phi(u,v) = (u+v,\ u-v,\ uv)$$

$$x(r,\theta) = (r,\ \theta,\ \tfrac{1}{4}(r^2-\theta^2))$$

olsun.

a) Her iki Parametrizasyonu için I. temel form katsayıları ve yay elemanını yazın.

$$\left.\begin{aligned} \phi_u &= (1,1,v) \\ \phi_v &= (1,-1,u) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 2+v^2 \\ F &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = uv \\ G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 2+u^2 \end{aligned}$$

$$ds^2_\phi = I_\phi = (2+v^2)\,du^2 + 2uv\,du\,dv + (2+u^2)\,dv^2$$

$$\left.\begin{aligned} x_r &= (1,0,\tfrac{r}{2}) \\ x_\theta &= (0,1,\tfrac{-\theta}{2}) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} E &= 1+\tfrac{r}{4} \\ F &= \tfrac{-r\theta}{4} \\ G &= 1+\tfrac{\theta}{4} \end{aligned}$$

$$ds^2_x = (1+\tfrac{r^2}{4})\,dr^2 + \tfrac{-2r\theta}{4}\,dr\,d\theta + (1+\tfrac{\theta^2}{4})\,d\theta^2$$

b) M Üzerinde $\alpha(t) = (t,t,0)$ eğrisinin her iki Parametrizasyona göre $\alpha(0)$, $\alpha(1)$ arasındaki yay uzunluklarının eşit olduğunu gösteriniz.

$$\alpha(t) = (t,t,0) = \phi(u(t), v(t))$$
$$= \phi(u(t)+v(t),\ u(t)-v(t),\ u(t).v(t))$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} u(t)+v(t) &= t \\ u(t)-v(t) &= t \\ u(t).v(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u(t) &= t \\ v(t) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} du &= dt \\ dv &= 0 \end{aligned}$$

Diğer Parametrizasyon için

$$\alpha(t) = (t,t,0) = x(r(t), \theta(t)) = (r(t), \theta(t), \tfrac{1}{4}(r^2(t) - \theta(t)))$$

$$r(t) = t, \quad \theta(t) = t \rightarrow dr = dt, \quad d\theta = dt$$

$$\Rightarrow \quad S = \int_0^1 \sqrt{\left(1+\frac{t^2}{4}\right)1^2 - \frac{t.t}{2}\,1 + \left(\frac{1+t^2}{1}\right)1}\; dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}$$

5) $x^2+y^2=1$ silindiri için $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ helis eğrisi geodezik midir?

$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$

$f(x,y,z) = x^2+y^2-1=0 \quad \rightarrow \quad \nabla f = (2x, 2y, 0)$

$\|\nabla f\| = \sqrt{4x^2+4y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2$

$N = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = (x,y,0) \;;\quad N|_{\alpha(t)} = (\cos t, \sin t, 0)$

$\Rightarrow N|_{\alpha(t)} = -\alpha''(t) \Rightarrow N|_{\alpha(t)} \parallel \alpha''(t)$

$\Rightarrow \alpha$ geodezikdir.

6) M yüzeyinin Parametrizasyonu $\Phi(u,v) = (u+v, u-v, uv)$ olsun. yüzeyin üzerindeki $\phi(t,t^2) = \alpha(t)$ eğrisinin teğet vektörü boyunca yüzeyin II. temel formunu hesaplayın.

$\Phi_u = (1,1,v) \quad , \quad \Phi_{uu} = (0,0,0) \quad , \quad \Phi_{uv} = (0,0,1)$

$\Phi_v = (1,-1,u) \quad , \quad \Phi_{vv} = (0,0,0)$

$$N = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \frac{1}{\sqrt{2(1+u^2+v^2)}}(u+v, u-v, -2)$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \langle \Phi_{uu}, N\rangle = 0 \\ f &= \langle \Phi_{vu}, N\rangle = \frac{-2}{\sqrt{2(1+u^2+v^2)}} \\ g &= \langle \Phi_{vv}, N\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \quad I(\alpha'(t)) = ?$$

$\phi(t,t^2) = \alpha(t)$

$u(t) = t \quad , \quad v(t) = t^2$

$du = dt \quad , \quad dv = 2t\,dt$

$$I(\alpha'(t)) = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \frac{-8t\,dt^2}{\sqrt{2(1+t^2+t^4)}}$$

7) $\alpha: \mathbb{R} \to E^3$, $\alpha(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1)$ eğrisinin S^2 küresi üzerinde olduğunu gösterin. Ayrıca α'nın asimptotik eğri ve geodezik eğri olup olmadığını inceleyiniz.

$$\frac{2}{4}\cos^2\sqrt{2}t + \frac{2}{4}\sin^2\sqrt{2}t + \frac{2}{4} = 1$$ old. α, S^2 üzerindedir.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$$

$$\nabla g = (2x, 2y, 2z) \to \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2 \to N = (x,y,z)$$

$$N|_{\alpha(t)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t, 1)$$

$$\alpha'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t, \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t, 0) = (-\sin\sqrt{2}t, \cos\sqrt{2}t, 0)$$

$$\alpha''(t) = (-\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t, -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t, 0)$$

$\to N|_{\alpha(t)} \not\parallel \alpha''$ $\to$ α geodezik değildir.

$\to \langle N, \alpha'' \rangle = -1 = 0$

$\Rightarrow$ α asimptotik eğri değildir.

Yüzey Alanları

E^3 Öklid uzayından bir M yüzeyi ve $\phi: U \subset E^3 \to E^3$ regüler yaması verilsin. Bir $R \subseteq U$ bölgesine göre ϕ yüzey yamasının $\phi(R)$ parçasının alanı $A_\phi(R)$ ile gösterilir ve

$$A_\phi(R) = \iint \|\phi_u \times \phi_v\| \, du\, dv = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv$$

ile tanımlanır.

☆ Bir yüzey yamasının alanı, parametrizasyondan bağımsızdır.

Ör $\phi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$ parametrik ifadesiyle verilen M yüzeyinin yüzey alanını bulunuz.

$\phi_u = (-v\sin u, v\cos u, 0)$

$\phi_v = (\cos u, \sin u, 1)$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 1 \end{vmatrix} = (v\cos u, v\sin u, -v)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{v^2\cos^2 u + v^2 \sin^2 u + v^2} = \sqrt{2}\, v$$

$$A_\phi(M) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|\phi_u \times \phi_v\| \, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, v \, du\, dv$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\, v\, u \Big|_0^{2\pi} dv$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2}\, v\, 2\pi \, dv$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi \frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = \sqrt{2}\,\pi \text{ br}^2$$

II. yol

$$\left.\begin{aligned} E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = v^2 \\ F &= \langle \phi_v, \phi_u \rangle = 0 \\ G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}\, v$$

8) $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ Parametre denklemleri ile verilen m yüzeyi üzerindeki $\alpha(t) = X(t,t)$ eğrisinin asimptotik ve geodezik eğri olup olmadığını araştırınız.

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1, 0, 2u) \\ X_v &= (0, 1, -2v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_u \times X_v = (-2u, 2u, 1)$$

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(-2u, 2v, 1)$$

$$\alpha(t) = X(t,t) = (t, t, 0)$$

$$N\big|_{\alpha(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+8t^2}}(-2t, 2t, 1)$$

$\Rightarrow \alpha(t) = (t, t, 1)$

$\alpha'(t) = (1, 1, 0)$

$\alpha''(t) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha'' = 0$ olduğundan hem geodezik hem de asimptotik eğridir.

9) $X(u,v) = (r\sin u, (R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v)$; $-\pi \leq u \leq \pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$ Tor yüzeyinin yüzey alanını hesaplayınız.

$$X_u = (r\cos u, -r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v)$$

$$X_v = (0, -(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = r^2\cos^2 u + r^2\cos^2 v\sin^2 u + r^2\sin^2 u\sin^2 v$$

$$= r^2(\cos^2 u + \sin^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v)) = r^2$$

$$F = \langle X_v, X_u \rangle = (R + r\cos u) r\sin u\sin v\cos v - (R + r\cos u) r\sin u\sin v\cos v$$

$$= 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (R + r\cos u)^2$$

$$A_x = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(R + r\cos u)^2 \, du\, dv$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (rRu + r^2\sin u)\Big|_{-\pi}^{\pi} \, dv$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2rR\pi \, dv$$

$= 2rR\pi v \Big|_{-\pi}^{\pi}$

$\Rightarrow \boxed{4\pi^2 rR}$

10) $\phi(u,v) = (u, v^2, v)$ yüzeyinin şekil operatörünü bulun. Gauss ve ortalama eğriliklerini bulun.

$$\left.\begin{array}{l}\phi_u = (1,0,0)\\ \phi_v = (0,2v,1)\end{array}\right\} \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,2v)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{1+4v^2}$$

$$N = \frac{1}{(1+4v^2)^{1/2}}(0,-1,2v)$$

$\rightarrow S(X_u) = -\nabla_{\phi_u} N = -N_u = (0,0,0) = 0.\phi_u + 0.\phi_v$

$\rightarrow S(X_v) = -\nabla_{\phi_v} N = N_v =$

$$N = \left(0, -(1+4v^2)^{-1/2}, 2v(1+4v^2)^{-1/2}\right)$$

$$\Rightarrow N_v = \left(0, \frac{4v}{(1+4v^2)^{3/2}}, \frac{2}{(1+4v^2)^{3/2}}\right) = 0.\phi_u + \frac{2}{(1+4v^2)^{3/2}}\phi_v$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{(1+4v^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(S) = 0 \rightarrow \text{Gauss} = k$$

$$H = \frac{iz(S)}{2} = \frac{1}{(1+4v^2)^{3/2}} \rightarrow \text{ortalama eğrilik}$$

Alıştırma)

$\phi(u,v) = (2u, 2v, \frac{1}{4}(u^2-v^2))$ yüzeyinin şekil operatörü matrisi yardımıyla Gauss ve ortalama eğriliğini hesaplayınız.